SS 2002 Prof. Dr. H. Geiges

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Für gegebene $n, k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ bestimme die Umlaufzahl $n(\gamma, 0)$, wo

$$\gamma(t) = e^{int} + re^{ikt} \text{ mit } t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 2. (a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus definiert ist. Zeige, daß man dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ auf G eine holomorphe Wurzelfunktion

$$z \mapsto \sqrt[k]{z},$$

d.h. eine holomorphe Umkehrfunktion von $z \mapsto z^k$, definieren kann.

(b) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ eine geschlossene Kurve mit $\gamma(a) \in \mathbb{R}^+$. Definiere $\sqrt[k]{\gamma(t)}$ durch $\sqrt[k]{\gamma(a)} \in \mathbb{R}^+$ und die Forderung, daß $\sqrt[k]{\gamma(t)}$ stetig in t ist. Berechne das Integral

$$\int_\gamma \sqrt[k]{z}\, dz,$$

für gegebene $k, \gamma(a)$ und $n(\gamma, 0)$.

Aufgabe 3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zeige, daß u Realteil einer auf ganz G holomorphen Funktion ist.

Aufgabe 4. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Kurve, K eine offene Kreisscheibe um $\gamma(a)$ und $f \in \mathcal{O}(K)$. Definiere eine Funktion $r : [a, b] \to [0, \infty]$ wie folgt: Ist f längs $\gamma\big|_{[a,t]}$ analytisch fortsetzbar, so ist $r(t)$ definiert als der Konvergenzradius der Taylorreihe der analytischen Fortsetzung im Punkt $\gamma(t)$; ist f längs $\gamma\big|_{[a,t]}$ nicht analytisch fortsetzbar, so setze $r(t) = 0$.

Zeige: Entweder $r \equiv \infty$ oder r ist eine stetige reellwertige Funktion.

Abgabe: Donnerstag 20.6.2002 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft.