SS 2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Geometrische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Ziel dieser Aufgabe ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Falls eine orientierte Verschlingung L eine ungerade [bzw. gerade] Anzahl von Komponenten besitzt, so enthält das Jones-Polynom $V(L)$ nur Terme der Form q^k [bzw. $q^{(2k+1)/2}$] mit $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Die Aussage gilt für die triviale Verschlingung.

(ii) Sei ein Kreuzungspunkt des Diagramms von L ausgewählt, und seien L_+, L_-, L_0 die entsprechenden in der Vorlesung definierten Diagramme. Es bezeichne m_+, m_-, m_0 die Anzahl der Komponenten der durch diese Diagramme repräsentierten Verschlingungen. Dann gilt:

(a) m_+ und m_- haben die gleiche Parität (d.h. beide sind gerade oder beide ungerade)

(b) m_+ und m_0 haben unterschiedliche Parität.

(iii) Falls der Satz für zwei der drei Polynome $V(L_+)$, $V(L_-)$, $V(L_0)$ gilt, dann auch für das dritte.

(iv) Folgern Sie aus (i)–(iii) den Satz in seiner allgemeinen Form.

Aufgabe 2. Für zwei orientierte Knoten K_1, K_2 bezeichne $K_1\#K_2$ deren verbundene Summe (unter Berücksichtigung der Orientierung), und $K_1 \sqcup K_2$ die Verschlingung, die durch die disjunkte Vereinigung von Knotendiagrammen für K_1 und K_2 (ohne wechselseitige Kreuzungspunkte) repräsentiert wird.

(a) Für die Windung w gilt

$$w(K_1\#K_2) = w(K_1 \sqcup K_2) = w(K_1) + w(K_2)\ .$$

(b) Für das Kauffman-Polynom X gilt

$$\begin{aligned} X(K_1 \sqcup K_2) &= -(a^2 + a^{-2})\, X(K_1)X(K_2) \\ X(K_1\#K_2) &= X(K_1)X(K_2)\ . \end{aligned}$$

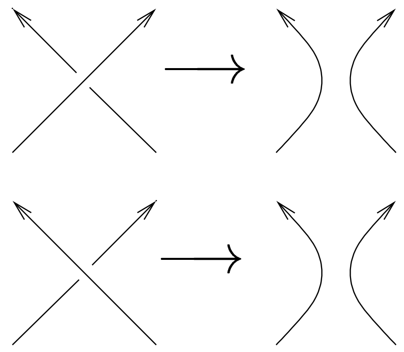
Hinweis: Analysieren Sie, wie "Zustände" von K_1 und K_2 einen Zustand von $K_1 \sqcup K_2$ bzw. $K_1\#K_2$ definieren, und wie groß die Anzahl der Komponenten ist, wenn man nach der durch den Zustand vorgegebenen Weise die Kreuzungspunkte entfernt.

Aufgabe 3. (a) Die Abschlüsse der Zöpfe b_1^3, $b_1^{-3} \in \mathcal{B}_2$ zu einem Knoten sind nicht isotop zueinander.

(b) Welchen Knoten erhält man durch Abschluß des Zopfes $b_1^{-1}b_2b_1^{-1}b_2 \in \mathcal{B}_3$?

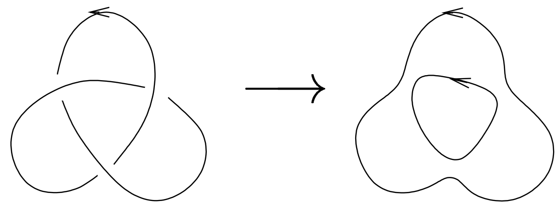
b.w.

Aufgabe 4. Betrachte ein orientiertes Knotendiagramm. Entferne alle Kreuzungspunkte nach folgenden Regeln:



Man erhält dann ein Diagramm, das nur noch aus unverknoteten und unverschlungenen Kreisen besteht.

Jeder dieser Kreise berandet eine Scheibe. Falls die Kreise ineinander liegen (wie im Beispiel), hebe die innen liegende Kreisscheibe jeweils etwas an.



Erklären Sie, wie man durch geeignetes Verbinden dieser Scheiben mit Bändern eine eingebettete Fläche im $\mathbb{R}^3$ erhalten kann, die den Knoten als Rand besitzt. Man nennt dies eine **Seifert-Fläche** des Knoten. Kann man (durch Modifikation der so erhaltenen Fläche) stets eine zusammenhängende Seifert-Fläche finden?

Abgabe: Mittwoch 4.5.2005 in der Vorlesung