SS 2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Geometrische Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien p, q teilerfremde natürliche Zahlen mit $p \geq 2$. Betrachte die Sphäre (vom Radius $\sqrt{2}$)

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2\} .$$

Definiere eine Wirkung der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$ mit Erzeuger σ durch

$$\sigma(z, w) = \left(e^{2\pi i/p} z, e^{2\pi i q/p} w\right) .$$

(a) Diese Wirkung ist fixpunktfrei und der Quotient

$$L(p, q) := S^3/\mathbb{Z}_p$$

daher eine 3-Mannigfaltigkeit.

(b) Zeigen Sie, daß $L(p, q)$ eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1 besitzt, und daß die hier gegebene Definition von $L(p, q)$ mit der aus der Vorlesung übereinstimmt.

(c) Es gibt einen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus $L(p, q) \to L(p, -q)$.

Aufgabe 2. Seien p, q wie oben und $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $ps - qr = 1$. Zeigen Sie, daß die Gruppe mit Präsentation

$$\langle a, b | \, a = b^r, \, b^p = 1 \rangle$$

isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen[1], daß $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$. Begründen Sie alternativ dieses Ergebnis mittels der Überlagerung $S^3 \to L(p, q)$.

Überlegen Sie sich dazu, daß $\pi_1(L(p, q))$ erzeugt wird von der Homotopieklasse der Schleife $t \mapsto (e^{2\pi i t/p}, 0)$, $t \in [0, 1]$.

Aufgabe 4. (a) Sei σ ein Erzeuger der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie, daß dann auch $\sigma^{q'}$ ein Erzeuger von Z_p ist, falls $q' \in \mathbb{N}$ koprim zu p ist.

(b) Seien $q, q' \in \mathbb{N}$ mit $qq' \equiv \pm 1 \mod p$. Zeigen Sie, daß $L(p, q)$ und $L(p, q')$ homöomorph zueinander sind

(i) mit Hilfe von Teil (a) und Aufgabe 1;

(ii) mittels der Beschreibung durch eine Heegaard-Zerlegung. (Hinweis: Vertauschen Sie die Rolle der beiden Volltori.)

[1] Siehe Abschnitt 2.5, Satz 16 aus der Vorlesung Algebraische Topologie (oder jedes Buch mit diesem Titel).

Bemerkung: Es gilt allgemein:

1. $L(p,q)$ ist homöomorph zu $L(p,q')$ genau dann, wenn
$$\pm q' \equiv q^{\pm 1} \mod p\ .$$
(Die Richtung "$\Leftarrow$" folgt aus den obigen Überlegungen).

2. $L(p,q)$ ist homotopie-äquivalent zu $L(p,q')$ genau dann, wenn $\pm qq'$ ein quadratischer Rest modulo p ist, d.h. $\pm qq' \equiv m^2 \mod p$ für ein geeignetes m.

   Zum Beispiel haben $L(7,1)$ und $L(7,2)$ den gleichen Homotopie-Typ, sind aber nicht homöomorph.

Aufgabe 5. Sei D^3 der Einheitsball in $\mathbb{R}^3$ und p,q wie in Aufgabe 1. Identifiziere jeden Punkt auf der oberen Hemisphäre ($z \geq 0$) von ∂D^3 mit dem Punkt, den man durch Rotation um $2\pi q/p$ um die z-Achse und Spiegelung in der xy-Ebene erhält. Sei $M(p,q)$ die resultierende 3-Mannigfaltigkeit.

(a) Der Zylinder
$$Z = D^3 \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$$
wird unter dieser Identifikation zu einem Volltorus.

(b) Man zerschneide das Komplement $D^3 \setminus Z$ geeignet in p Stücke um zu erkennen, daß $D^3 \setminus Z$ nach der Identifikation ebenfalls ein Volltorus ist.

(c) $M(p,q) = L(p,q)$.

Aufgabe 6. Beweisen Sie, daß die Zopfgruppe $\mathcal{B}_n$ die Präsentation
$$\left\langle \sigma, \tau \;\middle|\; \sigma^{-n}(\sigma\tau)^{n-1}, [\sigma^i\tau\sigma^{-i}, \tau], 2 \leq i \leq n/2 \right\rangle$$
mit $\sigma = b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$, $\tau = b_1$ besitzt. Leiten Sie damit eine Präsentation der symmetrischen Gruppe her.

Abgabe: Mittwoch 25.5.2005 in der Vorlesung