SS 2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Geometrische Topologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Der **Meridian** μ des Volltorus $S^1 \times D^2$ ist die Kurve $* \times \partial D^2$, der **Längengrad** λ die Kurve $S^1 \times *$. Hier steht $*$ für einen beliebigen Punkt in S^1 bzw. ∂D^2. Geben Sie (für $k \in \mathbb{Z}$) eine explizite Formel für einen Homöomorphismus von $S^1 \times D^2$ auf sich selbst an, der μ auf μ und λ auf eine Kurve der Form $k\mu + \lambda$ abbildet (d.h. auf eine Kurve in der Homotopieklasse letzterer Kurve in der Fundamentalgruppe von $S^1 \times \partial D^2$).

Aufgabe 2. (a) Ein Dehn-Twist von $S^1 \times S^1 = \partial(S^1 \times D^2)$ entlang μ (wie in Aufgabe 1) ist nicht isotop zur Identität, erweitert aber zu einem Homöomorphismus von $S^1 \times D^2$.

(b) Ein Dehn-Twist von $S^1 \times S^1 = \partial(S^1 \times D^2)$ entlang λ ist nicht isotop zur Identität und erweitert nicht zu einem Homöomorphismus von $S^1 \times D^2$.

Aufgabe 3. (a) Die **Kleinsche Flasche** ist die geschlossene, nichtorientierbare Fläche, die man durch Verkleben zweier Möbiusbänder entlang des Randes S^1 erhält. Zeigen Sie, daß die Kleinsche Flasche Rand einer 3-Mannigfaltigkeit ist.

(b) Zeigen Sie, daß man die Kleinsche Flasche alternativ als verbundene Summe zweier projektiver Ebenen $\mathbb{R}P^2$ erhalten kann. Hier ist $\mathbb{R}P^2$ der Quotientenraum $S^2/x \sim -x$. Die **verbundene Summe** zweier Flächen entsteht dadurch, daß man aus beiden eine 2-Scheibe D^2 entfernt und die Reststücke entlang der S^1-Ränder identifiziert.

(c) Geben Sie einen alternativen Beweis von (a) mittels (b).

(d) (Für Hörer mit Vorkenntnissen in algebraischer Topologie) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}P^2$ nicht Rand einer 3-Mannigfaltigkeit M sein kann. Hinweis: Angenommen, so ein M existierte. Dann könnte man die geschlossene 3-Mannigfaltigkeit $M \cup_{\mathbb{R}P^2} M$ bilden. Die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz (am besten mit $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten) führt zu einem Widerspruch.

Aufgabe 4. (a) Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus von S^1 ist isotop zur Identität.

(b) Jeder Homöomorphismus von $S^1 \times S^1$, der einen vorgegebenen Meridian μ und einen Längenkreis λ jeweils orientierungstreu auf sich abbildet (aber nicht notwenigerweise punktweise festläßt), ist isotop zur Identität.

Aufgabe 5. * Zeigen Sie direkt (d.h. ohne Verwendung des Satzes von Dehn-Lickorish), daß jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus von S^2 isotop zur Identität ist. Hinweis: Man kann z.B. verwenden, daß sich der Bereich zwischen zwei einfach geschlossenen Kurven auf S^2 in eindeutiger Weise homöomorph auf einen Standardkreisring abbilden läßt, sofern die (orientierungstreue) Abbildung der Randkurven vorgegeben ist. Dies läßt sich mit Methoden der Funktionentheorie ($\geq$ II) zeigen. Diese liefern eine eindeutige konforme (d.h. winkeltreue Abbildung) zwischen zwei Kreisringen, wenn man die Abbildung an einem Randpunkt vorgibt. Diese Abbildung läßt sich dann kanonisch so abändern, daß die Abbildung am Rand den Vorgaben entspricht. Diese Konstruktion ist stetig in diesen Randvorgaben. Vergl. H. Kneser, Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen, *Math. Z.* **25** (1926), 362–372. Für *Diffeomorphismen* von S^2 siehe die sehr schön zu lesende Arbeit von S. Smale, Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 621–626.

Abgabe: Mittwoch 8.6.2005 in der Vorlesung