SS 2005 Prof. Hansjörg Geiges

Geometrische Topologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei $\tilde{X}$ der unendliche Baum, wie im Bild angedeutet.

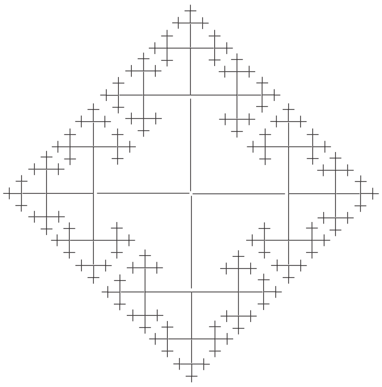

Abbildung 1: Unendlicher Baum

Sei $X = S^1 \vee S^1$ die Einpunktvereinigung von zwei Kopien von S^1.

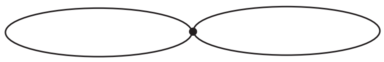

Abbildung 2: Einpunktvereinigung von zwei Kreisen

Definiere $p:\ \tilde{X} \to X$ wie folgt: Alle Ecken von $\tilde{X}$ gehen auf den gemeinsamen Punkt der beiden Kreise. Die horizontalen Äste gehen (für wachsendes x) im mathematisch positiven Sinne auf den ersten Kreis, die vertikalen Äste auf den zweiten Kreis. Zeigen Sie, daß dies eine Überlagerung definiert. Ist diese regulär? Welche Gruppe operiert gegebenenfalls auf $\tilde{X}$, so daß der Quotientenraum gleich X ist?

Aufgabe 2. Sei $p:\ X \to Y$ eine Überlagerung.

(a) Sei α ein **Weg** in Y, d.h. eine stetige Abbildung $\alpha:\ [0,1] \to Y$. Sei $y_0 = \alpha(0)$. Wähle einen Punkt $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Dann gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\alpha}$ in X mit $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

(b) Sei Q ein zusammenhängender topologischer Raum und

$$F:\ Q \times [0,1] \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung, die wir als eine Homotopie von Abbildungen $Q \to Y$ auffassen können. Außerdem gebe es eine stetige Abbildung $\tilde{F}:\ Q \times \{0\} \to Y$ mit $p \circ \tilde{F} = F|_{Q\times\{0\}}$.

Zeigen Sie, daß es dann eine stetige Abbildung $\tilde{F}: \ Q \times [0,1] \to Y$ gibt, die auf $Q \times \{0\}$ mit der gegebenen Abbildung übereinstimmt und $p \circ \tilde{F} = F$ erfüllt. Mit anderen Worten: Man kann das folgende Diagramm vervollständigen:

$$
\begin{tikzcd}
Q \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
Q \times [0,1] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}
$$

Man nennt dies die **Hochhebungseigenschaft** für Homotopien.

(c) Falls X wegzusammenhängend ist und Y einfach zusammenhängend, so ist p bereits ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Eine Überlagerung $\tilde{X} \to X$ mit $\tilde{X}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend heißt **universelle Überlagerung**. Aufgabe (c) zeigt die Eindeutigkeit der universellen Überlagerung (zu gegebenen X) unter Annahme des Wegzusammenhangs.

Aufgabe 3. Betrachte die Abbildung

$$
\begin{array}{rcl}
f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
z & \longmapsto & 2(z + \frac{1}{z})
\end{array}
$$

(a) Zeigen Sie, daß f eine verzweigte Überlagerung ist. Bestimmen Sie die Verzweigungspunkte und deren Vielfachheit.

(b) Beschreiben Sie das Bild der auf den Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : \ 1/2 < |z| < 2\}$ eingeschränkten Abbildung f.

Aufgabe 4. Geben Sie eine topologische Beschreibung für eine verzweigte 3-fache Überlagerung

$$\text{Kreisring} \to \mathrm{D}^2$$

mit drei Verzweigungspunkten unten und sechs Verzweigungspunkten oben. Hinweis: Beschreiben Sie D^2 durch Verkleben von drei Paaren benachbarter Seiten eines Neuneckes, den Kreisring durch geeignetes Verkleben dreier Kopien dieses Neuneckes.

Abgabe am 15.6.05 in der Vorlesung.