SS 2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Geometrische Topologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Für $g, h \geq 2$ gibt es eine Überlagerung $\Sigma_g \to \Sigma_h$ genau dann, wenn $h-1$ ein Teiler von $g-1$ ist.

Aufgabe 2. Sei $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion in den Variablen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$. Dann hat die reelle Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{x_1} & u_{y_1} & u_{x_2} & u_{y_2} \\ v_{x_1} & v_{y_1} & v_{x_2} & v_{y_2} \end{pmatrix}$$

vollen Rang (d.h. Rang 2) genau dann, wenn der komplexe Gradient

$$\nabla^{\mathbb{C}} f := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \right)$$

nicht verschwindet.

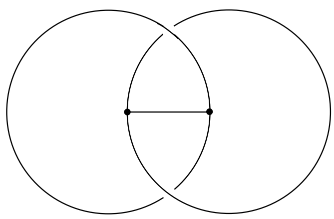
Aufgabe 3. Verifizieren Sie die Riemann-Hurwitz-Formel für die verzweigte Überlagerung $\Sigma_g \to S^2$, die man – wie in der Vorlesung gezeigt – ausgehend von einer Triangulierung von Σ_g konstruieren kann.

Aufgabe 4. Man kann den Begriff der verzweigten Überlagerung $p\colon\, M \to N$ von 3-Mannigfaltigkeiten etwas weiter fassen, indem man nur fordert, daß es einen eindimensionalen Unterkomplex L in der triangulierten 3-Mannigfaltigkeit N gibt, so daß $p^{-1}(L)$ ein eindimensionaler Unterkomplex von M ist und die Einschränkung von p auf $M \setminus p^{-1}(L)$ eine Überlagerung.

(a) Jede geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M besitzt eine verzweigte Überlagerung $M \to S^3$ mit Verzweigungsmenge $L \subset S^3$ gleich dem 1-Skelett eines Tetraeders (d.h. seinen 4 Ecken und 6 Kanten).

(b) Es gibt eine verzweigte Überlagerung $S^3 \to S^3$, verzweigt entlang S^1.

(c) Es gibt eine verzweigte Überlagerung $M \to S^3$ mit Verzweigungsmenge in $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ wie im folgenden Bild:



Abgabe: Mittwoch 22.6.2005 in der Vorlesung