SS 2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Geometrische Topologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Eine **einfach geschlossene Kurve** in einem topologischen Raum X ist eine stetige, injektive Abbildung $f : S^1 \to X$. Falls f ein Homöomorphismus auf $f(S^2)$ (mit der von X induzierten Topologie) ist, so spricht man von einer **Einbettung**.

(a) Falls X ein Hausdorff-Raum ist, so ist jede einfach geschlossene Kurve $f : S^1 \to X$ bereits eine Einbettung.

Der *Jordansche Kurvensatz* besagt, daß für jede einfach geschlossene Kurve $J = f(S^1)$ in $\mathbb{R}^2$ das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus J$ aus genau zwei (Weg-)Komponenten besteht, deren gemeinsamer Rand J ist. Der *Satz von Schönflies* sagt weiter, daß der Abschluß einer der Komponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus J$ homöomorph zu D^2 ist.

(b) Formulieren und beweisen Sie analoge Aussagen für einfach geschlossene Kurven in S^2.

(c) Alle Knoten (d.h. einfach geschlossenen Kurven) in $\mathbb{R}^2$ bzw. S^2 sind äquivalent, d.h. zu $J, J' \subset \mathbb{R}^2$ gibt es einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}^2$, der J auf J' abbildet; analog für S^2.

Aufgabe 2. Für jede Klasse $(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(T^2)$, mit den offensichtlichen Erzeugern der Fundamentalgruppe des 2-Torus T^2, gibt es einen Homöomorphismus $h : T^2 \to T^2$ mit $h_*(a, b) = (0, d)$. Hierbei ist $d = 0$ für $a = b = 0$ und $d = \pm\,\mathrm{ggT}(a, b)$ sonst.

Aufgabe 3. Sei $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ die Gruppe der (2×2)-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen, die invertierbar sind über $\mathbb{Z}$.

(a) Eine ganzzahlige (2×2)-Matrix ist genau dann in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, wenn ihre Determinante gleich ± 1 ist.

(b) Jede Matrix in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ ist ein Produkt von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es bezeichene $\mathrm{Aut}(T^2)$ die Gruppe der Automorphismen, d.h. der Selbsthomöomorphismen von T^2. Für $h \in \mathrm{Aut}(T^2)$ sei $h_* : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ der induzierte Homomorphismus von $\pi_1(T^2)$. Die Abbildung $h \mapsto h_*$ definiert einen surjektiven Homomorphismus.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß der Kern dieses Homomorphismus aus den Automorphismen von T^2 besteht, die isotop zur Identität sind. Das bedeutet, daß für zwei Homöomorphismen $h, h' : T^2 \to T^2$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) h, h' sind isotop (d.h. homotop via Homöomorphismen von T^2).

(ii) $h_* = h'_* \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

(iii) h, h' sind homotop (als stetige Abbildungen $T^2 \to T^2$). b.w.

Aufgabe 4. Man kann zeigen, daß eine Klasse $(a,b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(T^2)$ genau dann durch einen Knoten $K \subset T^2$ repräsentiert wird, wenn $a = b = 0$ oder $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Weiter sind zwei Knoten $K, K' \subset T^2$ genau dann ambient isotop, wenn sie (bis auf das Vorzeichen) die gleich Klasse in $\pi_1(T^2)$ repräsentieren.

(a) Seien $K, K' \subset T^2$ zwei disjunkte Knoten in der Klasse (a,b) bzw. (a',b'). Dann gilt

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \ .$$

(b) Falls K, K' sich in einem einzigen Punkt transversal schneiden, so gilt

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \pm 1 \ .$$

(c) Umgekehrt, falls

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, Z) \ ,$$

so gibt es Knoten K, K' in den Klassen (a,b) bzw. (a',b'), die sich in genau einem Punkt transversal schneiden.

(d) Verallgemeinern Sie dieses Argument um zu zeigen, daß $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ als **algebraische Schnittzahl** von K und K' interpretiert werden kann.

Abgabe: Mittwoch 29.6.2005 in der Vorlesung