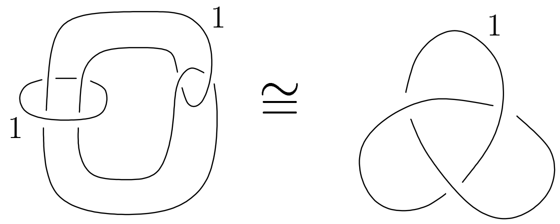
SS 2005

Prof. Hansjörg Geiges
Klaus Niederkrüger

Geometrische Topologie

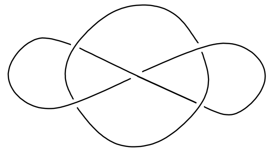
Übungsblatt 10

Aufgabe 1.



Formulieren Sie das Argument möglichst direkt, statt nur die Formel aus der Vorlesung zu zitieren.

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch Berechnung des Jones-Polynoms, daß die beiden trivialen Knoten miteinander verschlungen sind, obwohl ihre Verschlingungszahl 0 ist.



Aufgabe 3 (Zählt wie zwei Aufgaben). Seien J, K disjunkte orientierte Knoten in S^3 und $\mathrm{lk}(J, K)$ die in der Vorlesung definierte Verschlingungszahl.

(i) Betrachte J und K als Abbildungen $S^1 \to \mathbb{R}^3 \subset S^3$. Definiere eine Abbildung

$$f : S^1 \times S^1 \to S^2$$

durch

$$f(u, v) := \frac{K(u) - J(v)}{\|K(u) - J(v)\|} \ .$$

Bezüglich fest gewählter Orientierungen von $S^1 \times S^1$ und S^2 hat diese Abbildung einen wohldefinierten **Grad** $\deg(f)$, wie z.B. in der Vorlesung über Algebraische Topologie gezeigt. Differentialtopologisch läßt sich dieser Grad wie folgt definieren: Wähle einen Wert $y \in S^2$, so daß $f^{-1}(y)$ aus endlich vielen Punkten $x_1, \ldots, x_k \in S^1 \times S^1$ besteht und jeder dieser Punkte eine Umgebung besitzt, die homöomorph auf eine Umgebung von y abgebildet wird. Dann ist $\deg(f)$ die Summe dieser Punkte mit Vorzeichen gezählt: $+1$, falls f die Orientierung erhält; -1, falls f die Orientierung umkehrt. Definiere $\mathrm{lk}_1(J, K) = \deg(f)$.

(ii) Definiere $\mathrm{lk}_2(J, K)$ als das Integral

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_J \int\limits_K \frac{(x' - x)\,(dy\,dz' - dz\,dy') + (y' - y)\,(dz\,dx' - dx\,dz') + (z' - z)\,(dx\,dy' - dy\,dx')}{\big((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2\big)^{3/2}} \ ,$$

wobei (x, y, z) über J läuft und (x', y', z') über K. b.w.

(iii) Wähle eine Seifert-Fläche Σ für K wie auf Übungsblatt 3 beschrieben. Wir können annehmen, daß J die Fläche K in einer endlichen Anzahl von Punkten transversal schneidet. Wähle eine Orientierung von Σ und zähle die Schnittpunkte von J und Σ mit Vorzeichen, dies sei $\mathrm{lk}_3(J, K)$.

(a) Zeigen Sie, daß (bis auf das Vorzeichen)

$$\mathrm{lk}(J, K) = \mathrm{lk}_i(J, K), \quad i = 1, 2, 3 .$$

(b) Diskutieren Sie die Wahlmöglichkeiten in den obigen Definitionen, die das Vorzeichen der Verschlingungszahl beeinflussen.

Zusatzaufgabe (Setzt Homologie-Theorie voraus). Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt **(ganzzahlige) Homologiesphäre**, falls

$$H_i(M; \mathbb{Z}) \cong H_i(S^3, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

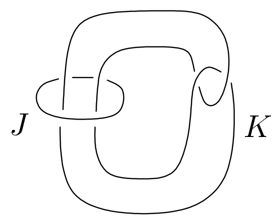
Zeigen Sie, daß Dehn-Chirurgie entlang eines Knotens in S^3 genau dann eine Homologiesphäre liefert, wenn der Chirurgiekoeffizient von der Form $1/k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Zusatzaufgabe. (a) Sei J der triviale Knoten und Σ_J eine Seifert-Fläche für J. Beschreiben Sie, wie man durch Schneiden entlang Σ_J eine Überlagerung

$$\widetilde{X} \longrightarrow X := S^3 \setminus J$$

konstruieren kann mit $\pi_1(\widetilde{X}) = \{1\}$, d.h. die universelle Überlagerung von X.

(b) Betrachte die Whitehead-Verschlingung:



Zeigen Sie, daß die "benachbarten" Anhebungen von K nach $\widetilde{X}$ jeweils Veschlingungszahl 1 haben.

(c) Zeigen Sie, daß es keine disjunkten Seifert-Flächen Σ_J, Σ_K für eine Whitehead-Verschlingung gibt.

Hinweis: Begründen Sie, daß aus $\Sigma_J \cap \Sigma_K = \emptyset$ folgen würde, daß Σ_K zu disjunkten Seifert-Flächen in $\widetilde{X}$ anheben würde. Dies stünde im Widerspruch zu (b).

Abgabe: Mittwoch 6.7.2005 in der Vorlesung