SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Es seien $f_0, f_1 \colon M \longrightarrow N$ und $g_0, g_1 \colon N \longrightarrow W$ jeweils isotope Einbettungen. Dann sind auch $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ isotope Einbettungen.

Aufgabe 2. In einem differenzierbaren Vektorbündel ist jeder differenzierbare Schnitt eine zum Nullschnitt isotope Einbettung.

Aufgabe 3. Für $n > m$ sind je zwei Einbettungen $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isotop zueinander.

Aufgabe 4.

(a) Sei M eine geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine Einbettung. Falls $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ negative Determinante hat, so ist f nicht isotop zu $A \circ f$. (**Hinweis:** Betrachten Sie den Grad der **Gauß-Abbildung** $\nu \colon M \longrightarrow S^n$, die jedem $x \in M$ die äußere Einheitsnormale im Punkt x zuordnet.[1])

(b) Die Inklusion $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist isotop zur antipodalen Einbettung $\mathrm{S}^n \ni x \longmapsto -x \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn n ungerade ist.

Bemerkung: Die Inklusion $\mathrm{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist homotop via Immersionen zur antipodalen Einbettung, d.h. man kann die 2-Sphäre "umstülpen", ohne dabei Singularitäten zu erzeugen. Dies ist das sogenannte **Smale-Paradox**, vergleiche

H. Geiges, h-Principles and Flexibility in Geometry, *Memoirs of the American Mathematical Society* ***164*** *(2003).*

Abgabe: Mittwoch 12.04.05 in der Vorlesung.

[1] Hier verwenden wir, daß eine geschlossene n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ notwendigerweise orientierbar ist. Einen einfachen Beweis dieser Tatsache werden wir noch kennenlernen.