SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei M eine orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ($p = q$ erlaubt) und einem orientierungserhaltenden Isomorphismus $\phi : T_pM \longrightarrow T_qM$ gibt es einen Diffeomorphismus f von M mit $T_pf = \phi$.

Aufgabe 2.

(a) Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Scheibensatz gilt auch (mit gleichem Beweis wie in der Vorlesung) für Einbettungen $\mathbb{R}^k \longrightarrow M$, $k \leq m$, allerdings im allgemeinen nur bis auf Isotopie, nicht ambiente Isotopie. Geben Sie Beispiele von Einbettungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{S}^1$, die nicht ambient isotop sind.

(b) Eine Einbettung $f\colon \mathrm{S}^{k-1} \longrightarrow M$ heißt **unverknotet**, wenn f zu einer Einbettung von D^k erweitert. Eine Abbildung f ist unverknotet genau dann, wenn es eine Karte $h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von M und eine Isotopie F von f gibt, so daß $h \circ F_1\colon \mathrm{S}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die Standardeinbettung $\mathrm{S}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 3. Es gibt keine Einbettung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$, deren Bild $f(\mathbb{R}^2)$ eine Menge der Form $\mathrm{S}^1 \times \{x\}$ enthält.
(**Hinweis:** Aufgabe 2 auf Blatt 2.)

Aufgabe 4. Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $h = (x_1, \ldots, x_n)\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte von M. Die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 (f \circ h^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} (h(p)) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

heißt **Hessesche** von f im Punkt p. Die Funktion f heißt **Morse-Funktion**, wenn die Hessesche von f in jedem ihrer kritischen Punkte vollen Rang hat. Solche Punkte nennt man **nichtausgeartet**. Zeigen Sie, daß diese Bedingung unabhängig von der Kartenwahl ist.

Abgabe: Mittwoch 26.04.05 in der Vorlesung.