SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß es zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $v \in \mathbb{R}^n$ gibt, $||v|| < \epsilon$, so daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & f(x)+v \end{array}$$

transversal zu N ist.

Aufgabe 2. Für eine differenzierbare Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ definiere

$$\Sigma^i(f) := \{p \in M \,|\, rg_p(f) = i\}\,.$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung und $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, daß es eine lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit Norm kleiner ϵ gibt, so daß $\Sigma^i(f+\alpha)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.
(**Hinweis:** Verwenden Sie Aufgabe 1 in geeigneter Weise.)

Aufgabe 3. Seien M, N, W geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten mit $\dim M + \dim N = \dim W$. Die **Schnittzahl** zweier differenzierbarer Abbildungen $f\colon M \longrightarrow W$ und $g\colon N \longrightarrow W$ ist definiert als

$$\#(f,g) := \#(f \times g, \Delta),$$

wobei Δ die Diagonale in $W \times W$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Die Schnittzahl hängt nur von den Homotopieklassen von f und g ab.

(b) Ist g eine Einbettung, so gilt $\#(f,g) = \#(f, g(N))$.

(c) $\#(g,f) = (-1)^{\dim M \cdot \dim N} \#(f,g)$.

Aufgabe 4. Seien $E \longrightarrow \mathrm{S}^2$ und $F \longrightarrow \mathrm{S}^2$ zwei orientierte 2-dimensionale Vektorbündel.

(a) Zeigen Sie, daß E und F genau dann isomorph sind, wenn die Selbstschnittzahl der Nullschnitte gleich ist.

(b) Konstruieren Sie zu jeder ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ ein Vektorbündel $E_k \longrightarrow \mathrm{S}^2$, dessen Nullschnitt die Selbstschnittzahl k hat.

Zusatzfrage: Gilt (a) auch für 2-dimensionale Vektorbündel über einer beliebigen geschlossenen Fläche?

Abgabe: Mittwoch 10.05.06 in der Vorlesung.