SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei M eine geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \longrightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Fixpunkt $x \in M$ von f heißt **Lefschetz-Fixpunkt**, wenn der Graph von f die Diagonale $\Delta \subset M \times M$ transversal in $(x, f(x))$ schneidet. Ist $x \in M$ ein Lefschetz-Fixpunkt, definiert man $L_x(f) := \pm 1$, je nachdem, ob der Graph von f die Diagonale Δ in $(x, f(x))$ positiv oder negativ schneidet. $L_x(f)$ heißt **lokale Lefschetz-Zahl**.

(a) Sei $f\colon M \longrightarrow M$ eine Abbildung, deren Graph die Diagonale Δ transversal schneidet. Dann gilt

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

(b) Zeigen Sie, daß die lokale Lefschetz-Zahl $L_x(f)$ positiv ist, wenn $I - T_x f$ orientierungserhaltend auf $T_x M$ ist, und daß sie im orientierungsumkehrenden Fall negativ ist.

(c) Diskutieren Sie die möglichen Lefschetz-Fixpunkte in Dimension 2.

Aufgabe 2. Für geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten M und N gilt die Identität

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{RP}^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, einen orientierungsumkehrenden Selbstdiffeomorphismus besitzt.

(b) Sei M eine $2n+1$-dimensionale orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß der Diffeomorphietyp von $\mathbb{RP}^{2n+1} \# M$ nicht von der Wahl der Orientierungen auf M und $\mathbb{RP}^{2n+1}$ abhängig ist.

Aufgabe 4.

(a) Finden Sie eine Einbettung von $\mathbb{R}^n \# \ldots \# \mathbb{R}^n$ (k Summanden) in den $\mathbb{R}^q$ mit q möglichst klein.

(b) Es bezeichne M_0 das Möbiusband. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{RP}^2 \cong \mathrm{D}^2 \cup_{S^1} \mathrm{M}_0$.

(ii) $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathrm{M}_0 \cup_{S^1} \mathrm{M}_0$.

b.w.

(c) $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ ist diffeomorph zu $(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R})/\sim$, wobei unter den Abbildungen

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha_+ : & \mathrm{S}^2 & \times & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{S}^2 & \times & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z) & , & t) & \longmapsto & ((-x,-y,-z) & , & 2-t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha_- : & \mathrm{S}^2 & \times & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{S}^2 & \times & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z) & , & t) & \longmapsto & ((-x,-y,-z) & , & -2-t) \end{array}$$

identifiziert wird.

Abgabe: Mittwoch 17.05.06 in der Vorlesung.