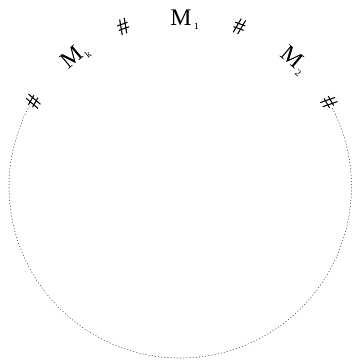
SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 7

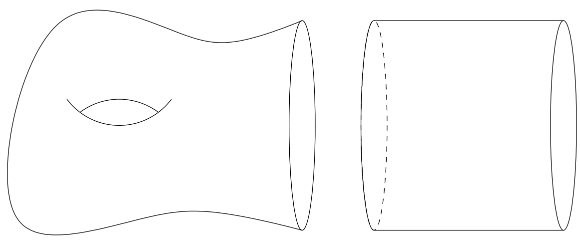
Aufgabe 1. Seien $M_1, \ldots, M_k$ zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dann ist



diffeomorph zu $M_1 \# \ldots \# M_k \# (\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^{n-1})$.

Aufgabe 2. Seien M_1 und M_2 zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M_1 \# M_2$ kobordant zu $M_1 + M_2$.

Aufgabe 3. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\varphi\colon\ \partial M \longrightarrow \partial M \times \{0\}$ der offensichtliche Diffeomorphismus. Dann ist M diffeomorph zu $M \cup_\varphi \partial M \times [0,1]$.



Aufgabe 4.

(a) Seien M und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand, und $\varphi_1, \varphi_2\colon\ \partial M \longrightarrow \partial B$ Diffeomorphismen. Falls es einen Diffeomorphismus $f\colon\ B \longrightarrow B$ mit $f|_{\partial B} \circ \varphi_1 = \varphi_2$ gibt, so sind die Randverheftungen $M \cup_{\varphi_1} B$ und $M \cup_{\varphi_2} B$ diffeomorph.

(b) Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei φ_A die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{S}^1 & \times & \mathrm{S}^1 & \longrightarrow & \mathrm{S}^1 & \times & \mathrm{S}^1 & \subset & \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \\ (z & , & w) & \longmapsto & (z^a w^c & , & z^b w^d). & & \end{array}$$

Zeigen Sie, daß φ_A ein Diffeomorphismus ist.

b.w.

(c) Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f\colon D^2 \times \mathrm{S}^1 \longrightarrow M$ eine Einbettung. Fasse φ_A auf als Abbildung

$$\partial\big(M \backslash f(\mathring{D}^2 \times \mathrm{S}^1)\big) \longrightarrow \partial(D^2 \times \mathrm{S}^1).$$

Sei M' die Randverheftung

$$\big(M \backslash f(\mathring{D}^2 \times \mathrm{S}^1)\big) \cup_\varphi D^2 \times \mathrm{S}^1.$$

Man sagt, M' entsteht aus M durch **Dehn-Chirurgie**.

(i) M' hängt (bis auf Diffeomorphie) nur von dem Koeffizienten $\frac{d}{b} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ab.

(ii) Für $b = \pm 1$ ist M' das Ergebnis einer elementaren Chirurgie an M.

(iii) Für $b = 0$ ist M' diffeomorph zu M.

Abgabe: Mittwoch 24.05.06 in der Vorlesung.