Differentialtopologie II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.

(a) Es bezeichne A die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

$$S^3 \cong D^2 \times S^1 \cup_{\varphi_A} D^2 \times S^1,$$

wobei φ_A gemäß Übungsblatt 7, Aufgabe 4 definiert ist.

(b) Seien M_φ, M_ψ zwei n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die als Randverheftungen aus den Mannigfaltigkeiten R_1 und R_2 entstehen, d.h.

$$M_\varphi = R_1 \cup_\varphi R_2 \quad \text{bzw.} \quad M_\psi = R_1 \cup_\psi R_2,$$

wobei $\varphi, \psi \colon \partial R_1 \longrightarrow \partial R_2$ Diffeomorphismen sind. Falls φ und ψ isotop sind, so sind M_φ und M_ψ diffeomorph.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie alle Diffeomorphietypen von 3-Mannigfaltigkeiten der Form

$$D^2 \times S^1 \cup_\varphi D^2 \times S^1,$$

wobei $\varphi \colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ ein Diffeomorphismus ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß jeder Diffeomorphismus des Torus isotop zu einem Diffeomorphismus des Typs φ_A ist für geeignetes $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 3. Sei M eine geschlossene Fläche und $f \in C^\infty(M)$ eine geordnete Morse-Funktion mit jeweils genau einem kritischen Punkt vom Index 0, 1 bzw. 2. Dann ist M diffeomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$.

Aufgabe 4.

(a) Sei $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_q) \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^q$ eine Immersion der Mannigfaltigkeit M. Für fast alle $a_1, \ldots, a_q$ ist dann $a_1\phi_1 + \ldots + a_q\phi_q$ eine Morse-Funktion auf M.

(b) Seien $p_1, \ldots, p_4$ vier Punkte des $\mathbb{R}^3$ in allgemeiner Lage, d.h. nicht enthalten in einer Ebene. Seien $q_1, \ldots, q_4$ elektrische Ladungen in diesen Punkten. Das Potential des resultierenden Feldes ist

$$V_q(x) = \frac{q_1}{||x - p_1||} + \ldots + \frac{q_4}{||x - p_4||}.$$

Die kritischen Punkte des Potentials heißen **Gleichgewichtspunkte** des elektrischen Feldes und ein solcher Gleichgewichtspunkt heißt **nicht-ausgeartet**, wenn er nicht-ausgeartet im Sinne der Morse-Theorie ist. Zeigen Sie, daß für fast alle $q = (q_1, \ldots, q_4)$ das elektrische Feld nur endlich viele und nicht-ausgeartete Gleichgewichtspunkte hat.

Abgabe: Mittwoch 31.05.06 in der Vorlesung.