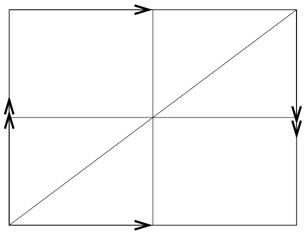
SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Beweisen Sie, daß $T^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.
(**Hinweis:** Stellen Sie die Flächen mittels Anklebung von Henkeln dar.)

Aufgabe 2. Das folgende Bild zeigt drei einfach geschlossene Kurven auf der Kleinschen Flasche.



(a) Bestimmen Sie, ob die Tubenumgebung jeweils einer der drei eingezeichneten Kurven diffeomorph zu einem Zylinder oder einem Möbiusband ist.

(b) Welche Mannigfaltigkeit erhält man, wenn man eine Tubenumgebung jeweils einer der eingezeichneten Kurven herausschneidet und die entstehenden Randkomponenten mit Scheiben abschließt?

Aufgabe 3.

(a) Sei F eine orientierte Fläche des Geschlechtes g, und seien $S_1, S_2 \subset F$ eingebettete Kopien von S^1, die jede für sich die Fläche nicht trennt. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $f\colon (M, S_1) \longrightarrow (M, S_2)$.
(**Hinweis:** Man kann F als Sphäre mit angehefteten Henkeln darstellen, so daß die S_i Meridiane von Henkeln sind.)

(b) Falls sowohl S_1 als auch S_2 trennend sind, unter welchen Voraussetzungen bleibt die Folgerung aus (a) gültig?

Aufgabe 4. Als **Kobordismengruppen Ω^q bzw. $\mathcal{N}^q$** bezeichnet man die Menge der q-dimensionalen orientierten bzw. nicht-orientierten geschlossenen Mannigfaltigkeiten modulo (orientierte bzw. nicht-orientierte) Bordanz, mit Verknüpfung $+$ gegeben durch die topologische Summe von Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, daß dies in der Tat abelsche Gruppen sind, und weiter:

(a) $\Omega^0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{N}^0 = \mathbb{Z}_2$.

(b) $\Omega^1 = 0$, $\mathcal{N}^1 = 0$.

(c) $\Omega^2 = 0$, $\mathcal{N}^2 = \mathbb{Z}_2$ (mit Erzeuger $\mathbb{RP}^2$).

Sie dürfen — wenn erforderlich — die Eulercharackteristik benutzen. Beachten Sie, daß diese ebenfalls für kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand definiert ist. Sie dürfen folgende Aussage benutzen: Kann man eine kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit M (mit oder ohne Rand), als Vereinigung $A \cup B$ zweier kompakter Untermannigfaltigkeiten A und B darstellen, so daß $A \cap B$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, so gilt:

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Abgabe: Mittwoch 14.06.06 in der Vorlesung.