SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

# Differentialtopologie II

Übungsblatt 11

Als $n$-**Zelle** bezeichnet man einen topologischen Raum homöomorph zur offenen $n$-Scheibe. Eine **Zellenzerlegung** eines Raumes $X$ ist eine Menge

$$\mathcal{E} = \{e^n_\lambda \subset X \,|\, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda_n\}$$

von $n$-Zellen $e^n_\lambda$, so daß

$$X = \bigsqcup_{n,\lambda} e^n_\lambda.$$

Man bezeichnet die Menge

$$X^{(n)} := \bigcup_{k\leq n, \lambda\in\Lambda_k} e^k_\lambda$$

als $n$-**Skelett**. Ein Hausdorff-Raum $X$ mit Zellenzerlegung $\mathcal{E}$ heißt **CW-Komplex**, falls gilt:

(i) Für jede $n$-Zelle $e^n_\lambda \in \mathcal{E}$ gibt es eine stetige Abbildung $f_\lambda\colon\ D^n \longrightarrow X$, die sog. **charakteristische Abbildung**, mit

$$f_\lambda|_{\overset{\circ}{D}{}^n}\colon\ \overset{\circ}{D}{}^n \overset{\cong}{\longrightarrow} e^n_\lambda \quad \text{und} \quad f_\lambda(\mathrm{S}^{n-1}) \subset X^{(n-1)}.$$

(ii) (**C**losure finiteness) Der Abschluß $\bar{e}$ jeder Zelle $e \in \mathcal{E}$ schneidet nur endlich viele Zellen.

(iii) (**W**eak topology) $A \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$.

**Aufgabe 1.**

(a) Geben Sie eine CW-Zerlegung von $S^2$ an.

(b) Geben Sie eine CW-Zerlegung des Torus an.

(c) Geben Sie eine CW-Zerlegung von $T^2 \# T^2$ an, die nur eine 2-Zelle verwendet.

**Aufgabe 2.** Ein **Unterkomplex** $A$ eines CW-Komplexes $X$ ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus Zellen von $X$ zusammengesetzt ist. Ein **CW-Paar** $(X, A)$ besteht aus einem CW-Komplex $X$ und einem Unterkomplex $A$.

(a) Auf einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ mit Rand $\partial M$ gibt es eine Morse-Funktion $f\colon\ M \longrightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a$, $b$ als regulärem Wert, so daß $\partial M = f^{-1}(a) \sqcup f^{-1}(b)$. Eine solche Morse-Funktion heißt **zulässig**.
(**Hinweis:** Sie dürfen die Existenz von geordneten Morse-Funktionen voraussetzen.)

b.w.

Im folgenden sei $M$ zusätzlich kompakt:

(b) Gibt es eine zulässige Morse-Funktion $f\colon M \longrightarrow [a,b]$ des Typs $(k_0,\ldots,k_n)$, d.h. $f$ besitzt $k_i$ kritische Punkte vom Index $i$, so daß $\partial M = f^{-1}(b)$, dann ist $M$ vom Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes mit genau $k_i$ Zellen der Dimension $i = 0,\ldots,n$.
(Begründen Sie kurz, wie Satz 3 aus Abschnitt 11.3 auf beliebige Dimensionen varallgemeinert.)

(c) $(M, \partial M)$ hat den Homotopietyp eines CW-Paares der Dimension $\leq n$.

**Aufgabe 3.** Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$g[z_0 : \ldots : z_n] = \frac{\sum \lambda_j |z_j|^2}{\sum |z_j|^2},$$

wobei die $\lambda_j$ verschiedene positive Zahlen sind. Zeigen Sie, daß $g$ eine Morse-Funktion des Typs $(1,0,1,0,\ldots,1,0,1)$ ist. Daher ist $\mathbb{CP}^n$ vom Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes mit einer Zelle in jeder geraden Dimension.

**Bemerkung.** Mittels dieses Ergebnisses lassen sich die Homologiegruppen von $\mathbb{CP}^n$ berechnen,

$$H_k(\mathbb{CP}^n; G) \cong \begin{cases} G & , \quad k \in 2\mathbb{Z} \cap [0, 2n] \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

**Zusatzaufgabe.** Die Aussage aus Aufgabe 2 (c) gilt auch für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten, was Sie hier beweisen sollen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie, daß man sich auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand beschränken kann.
- Eine Funktion $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ hat höchstens abzählbar viele kritische Punkte. Daher gibt es auch auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten $M$ geordnete Morse-Funktionen.
- Eine Abbildung zwischen $f\colon A \longrightarrow B$ zwischen CW-Komplexen $A$ und $B$ heißt **zellulär**, falls für alle $n$ gilt, daß $f(A_n) \subset B_n$. Verklebt man zwei CW-Komplexe mittels zellulärer Abbildungen, so erhält man erneut einen CW-Komplex.
- Beweisen Sie nun, daß jede $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand vom Homotopietyp eines CW-Komplexes der Dimension $\leq n$ ist.
(**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, daß man Abbildungen zwischen CW-Komplexen durch zelluläre Abbildungen approximieren kann.)

Abgabe: Mittwoch 28.6.06 in der Vorlesung.