SS 2006 Prof. Hansjörg Geiges

Differentialtopologie II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit G mit Gruppenstruktur derart, daß die auf G definierte Multiplikation $\mu\colon\ G\times G\longrightarrow G$ und Inversion $\iota\colon\ G\longrightarrow G$ differenzierbare Abbildungen sind, heißt **Lie-Gruppe**. Zeigen Sie, daß jede Lie-Gruppe ein triviales Tangentialbündel besitzt.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{RP}^3$, SO_3 und $T_1\mathrm{S}^2$ diffeomorph sind (vergl. Übungsblatt 5 der Vorlesung Differentialtopologie I).

(b) Zeigen Sie, daß $T\mathrm{S}^2$ nicht **homöomorph** zu $\mathrm{S}^2\times\mathbb{R}^2$ ist. (Die Tatsache, daß $T\mathrm{S}^2$ nicht bündel-isomorph zu $\mathrm{S}^2\times\mathbb{R}^2$ ist folgt direkt aus dem Satz vom Igel.)
(**Hinweis:** Wie sehen die Fundamentalgruppen von $\mathbb{RP}^3$ und $\mathrm{S}^2\times\mathrm{S}^1$ aus?)

Aufgabe 3. Es bezeichne ε das triviale Geradenbündel über $\mathbb{RP}^n$ und ξ das Normalenbündel von $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{RP}^{n+1}$. Dann gilt

$$\varepsilon\oplus T\mathbb{RP}^n\cong\xi\oplus\ldots\oplus\xi.$$

(**Hinweis:** Betrachten Sie die Standardeinbettung $\mathrm{S}^n\subset\mathrm{S}^{n+1}$ sowie die Antipodenabbildung.)

Aufgabe 4. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Besitzt das Tangentialbündel TM einen nicht-trivialen Schnitt und sind $TM\oplus\varepsilon$ sowie $TN\oplus\varepsilon$ trivial, dann auch $T(M\times N)$.

Abgabe: Mittwoch 5.07.06 in der Vorlesung.