SS 2007 Prof. Hansjörg Geiges

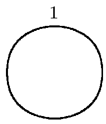
Chirurgie

Übungsblatt 5

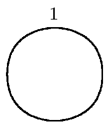
Aufgabe 1.

(a) Die 2-Sphäre $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ hat Selbstschnittzahl $+1$, wobei $\mathbb{C}P^2$ die durch die komplexe Struktur gegebene Orientierung trägt.

(b) Der durch das Kirby-Diagramm

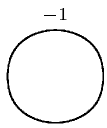


gegebene 2-Henkelkörper W_2 hat $\partial W_2 = \mathrm{S}^3$, und

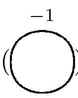


$\cup_{S^3}$ 4-Henkel $= \mathbb{C}P^2$

(c) Was ist



$\cup_{S^3}$ 4-Henkel?

Begründen Sie zunächst, warum $\partial($

$) = S^3$

b.w.

Aufgabe 2. Sei W eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit mit einer Henkelzerlegung. Es bezeichne W_i die Vereinigung aller k-Henkel mit $k \leq i$.

(a) Eine Orientierung von W ist ein Atlas von W, dessen Übergangsfunktionen orientierungserhaltend sind. Zeigen Sie, daß eine Homotopieklasse von Trivialisierungen von TW über W_0, die auf W_1 erweitern, eine Orientierung von W darstellt.

(b) Zeigen Sie, daß man mittels dieser Auffassung von Orientierung eine Kohomologieklasse in $H^1(W;\mathbb{Z}_2)$ konstruieren kann, die genau dann verschwindet, wenn W orientierbar ist. Diese Klasse ist das sogenannte **topologische Hindernis** für die Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit W.
(**Hinweis:** Das Tangentialbündel über W_0 is trivial. D.h. Sie müssen ein Hindernis dafür finden, daß eine Trivialisierung von W_0 auf W_1 erweitert.)

(c) Sei nun W orientierbar. Eine **Spin-Struktur** ist eine Homotopieklasse von Trivialisierungen des Tangentialbündels TW über W_1, die über W_2 erweitern. Zeigen Sie die Existenz eines topologischen Hindernisses in $H^2(W;\mathbb{Z}_2)$ für die Existenz einer solchen Trivialisierung.

Aufgabe 3. Sei M eine geschlossene, orientierte 3-Mannigfaltigkeit und K ein orientierter, nullhomologer, eingebetteter Knoten. Es bezeichne $M_n(K)$ die Mannigfaltigkeit, die aus M durch Chirurgie mit Rahmung n entlang K entsteht. Berechnen Sie die Homologiegruppen von $M_n(K)$.

Aufgabe 4. Leiten Sie eine Heegaard-Zerlegung von $M_n(K)$ her, die nur Daten einer Heegaard-Zerlegung von M und des Knotens K benutzt.

Abgabe: Mittwoch 16.05.07 in der Vorlesung.