SS 2007 Prof. Hansjörg Geiges

Chirurgie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie:

(a) Ist N eine weitere glatte n-Mannigfaltigkeit und ist $M\#N$ homöomorph zu S^n, so ist auch M homöomorph zu S^n. (**Hinweis:** Es gilt der Satz von Schönflies (vergl. G.E. Bredon, Topology and Geometry, Theorem IV.19.11): Ist $h\colon \mathrm{S}^{n-1} \times [-1,1] \longrightarrow \mathrm{S}^n$ eine stetige Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, so ist der Abschluß jeder der beiden Komponenten von $\mathrm{S}^n \backslash h(\mathrm{S}^{n-1} \times \{0\})$ homöomorph zu D^n.)

(b) Eine n-dimensionale Homotopiesphäre Σ ist eine n-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu S^n ist. Zeigen Sie: Ist $D^n \subset \Sigma$ eine eingebettete n-Scheibe, so ist $\Sigma \backslash D^n$ zusammenziehbar (d.h. homotopieäquivalent zu einem Punkt).

(c) Ist M orientiert, so hat $M\#\overline{M}$ den Homotopietyp von $M\backslash D^n$, mit $D^n \subset M$ eine eingebettete n-Scheibe.

(d) $\Sigma\#\overline{\Sigma}$ berandet eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 2.

(a) Sei M eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 6$ mit einfach zusammenhängendem Rand, und sei $D^n \subset \mathrm{Int}\,(M)$ eine eingebettete n-Scheibe.

  (i) $M\backslash \mathrm{Int}\,(D^n)$ ist ein h-Kobordismus zwischen $S^{n-1} = \partial D^n$ und ∂M.

  (ii) M ist diffeomorph zu D^n.

(b) Beweisen Sie mittels (a) und Aufgabe 1 die 5-dimensionale Poincaré-Vermutung: Eine Homotopiesphäre der Dimension 5 ist homöomorph zur 5-Sphäre.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und die Gauß-Krümmung von $\mathrm{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $T^2 \subset \mathbb{R}^3$; wählen Sie dazu Parametrisierungen von S^2 bzw. T^2 (bis auf eine Nullmenge) als Flächenstück. Berechnen Sie das Integral der Gauß-Krümmung über die jeweilige Fläche.

Abgabe: Mittwoch 30.05.07 in der Vorlesung.