SS 2007 Prof. Hansjörg Geiges

Chirurgie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und

$$\ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

der singuläre Kettenkomplex von X, so daß $H_1(X;\mathbb{Z}) = \ker(\partial_1)/\mathrm{im}(\partial_2)$.

(a) Zeigen Sie, daß folgende Sequenz spaltet:

$$0 \longrightarrow \ker(\partial_1) \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1/\ker(\partial_1) \longrightarrow 0$$

(b) Es gelte $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$. Beweisen Sie ohne Verwendung des universellen Koeffiziententheorems, daß

$$H^2(X;\mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(H_2(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2).$$

Hier ist $H^2(X;\mathbb{Z})$ die Homologie des Komplexes mit Kettengruppen

$$C^k := \mathrm{Hom}(C_k(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$$

und Randoperator $\delta\colon\ C^k \longrightarrow C^{k+1}$ gegeben duch $\delta f = f \circ \partial$.

Aufgabe 2. Sei W ein Kobordismus zwischen M_0 und M_1.

(a) Ist W eine Spin-Mannigfaltigkeit, so auch M_0 und M_1.

(b) Sind M_0 und M_1 keine Spin-Mannigfaltigkeiten, so ist auch W keine Spin-Mannigfaltigkeit. Genauer: Die zweite Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(W) \in H^2(W;\mathbb{Z}_2)$, aufgefaßt (nach Aufgabe 1) als Element von $\mathrm{Hom}(H_2(W;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$, ist nicht-trivial auf dem Bild von $H_2(M_i;\mathbb{Z})$ in $H_2(W;\mathbb{Z})$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie $\pi_1(\mathrm{SO}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b.w.

Aufgabe 4.

(a) Seien $E \longrightarrow M$ und $F \longrightarrow M$ zwei orientierbare Vektorbündel der Dimension ≥ 3 über der Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, daß

$$w_2(E \oplus F) = w_2(E) + w_2(F).$$

Vergegenwärtigen Sie sich dazu die Definition der Hindernisklasse, wie sie aus Übungsblatt 5, Aufgabe 2 hervorgeht. Diese ist ohne Beschränkungen erweiterbar auf beliebige Vektorbündel über Mannigfaltigkeiten.

(b) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 5 und $\mathrm{S}^2 \subset M$ eine eingebettete Sphäre. Das Normalenbündel $\nu\mathrm{S}^2$ dieser Sphäre in M ist genau dann trivial, wenn

$$\langle w_2(M), [\mathrm{S}^2] \rangle = 0.$$

(**Hinweis:** In Aufgabe 2 (c) von Übungsblatt 5 muß man für $\dim W = 2$ richtigerweise das Tangentialbündel TW durch das stabilisierte Tangentialbündel $TW \oplus \varepsilon$ ersetzen, wobei ε ein triviales Geradenbündel bezeichnet. Begründen Sie damit zunächst, daß $w_2(TS^2) = 0$. Verwenden Sie dann auch Aufgabe 3.)

Abgabe: Mittwoch 13.06.07 in der Vorlesung.