SS 2007 Prof. Hansjörg Geiges

Chirurgie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei Y eine 3-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit. Eine Ebenendistribution $\xi \subset TY$ heißt **Kontaktstruktur**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind. Die Distribution läßt sich als Kern einer 1-Form α realisieren, und es gilt

$$\alpha \wedge d\alpha \neq 0.$$

Die 1-Form α ist eine sogenannte **Kontaktform** bzgl. ξ. Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld R_α, s.d. $\iota_{R_\alpha}\alpha \equiv 1$ und $\iota_{R_\alpha} d\alpha \equiv 0$. Dieses Vektorfeld R_α heißt **Reeb-Feld** zur Kontaktform α.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Flußbox-Theorems und elementaren Methoden (d.h. ohne Verwendung von Gray-Stabilität), daß es um jeden Punkt $p \in Y$ eine Karte gibt, in der die Kontaktform folgende Gestalt annimmt:

$$dz + x\, dy.$$

(**Hinweis:** Das Flußbox-Theorem besagt, daß es um jeden Punkt $p \in Y$ eine Karte mit Koordinaten (u, v, w) gibt, s.d. das Reeb-Feld von der Gestalt ∂_w ist.)

(iii) Zeigen Sie, daß man die Kontaktform in geeigneten lokalen Koordinaten auch schreiben kann als

$$dz + x\, dy - y\, dx.$$

Aufgabe 2. Ein **Kontaktomorphismus** zwischen zwei Kontaktmannigfaltigkeiten ist ein Diffeomorphismus, der die Kontaktstrukturen erhält. Er heißt **strikt**, wenn die Kontaktformen erhalten bleiben. Seien nun (M_0, ξ_0) und (M_1, ξ_1) koorientierte Kontaktmannigfaltigkeiten mit Kontaktformen α_0 und α_1. Diese seien in symplektische Mannigfaltigkeiten (W_0, ω_0) bzw. (W_1, ω_1) eingebettet, derart, daß sie transversal sind zu Liouville-Vektorfeldern X_i. Zusätzlich gelte $\alpha_i = (\iota_{X_i}\omega_i)_{TM_i}$. Wenn es einen strikten Kontaktomorphismus ϕ zwischen (M_0, α_0) und (M_1, α_1) gibt, dann erweitert dieser zu einem Symplektomorphismus kleiner Umgebungen der M_i in W_i.

b.w.

Aufgabe 3. Seien nun $(M_0, \ker \alpha_0)$ und $(M_1, \ker \alpha_1)$ Kontaktmannigfaltigkeiten, eingebettet in die symplektische Mannigfaltigkeit (W, ω), so daß ein Liouville-Vektorfeld X auf (W, ω) existiert, derart, daß $\alpha_i = \iota_X \omega|_{TM_i}$ für $i = 0, 1$. Des weiteren sei $\mu\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit der Eigenschaft, daß die Zeit-1-Abbildung Φ_1 des zum Vektorfeld $\mu \cdot X$ assoziierten Flusses Φ zu einem Diffeomorphismus von M_0 nach M_1 einschränkt. Zeigen Sie, daß $\Phi_1|_{M_0}$ sogar ein Kontaktomorphismus ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß man durch Modifikation der Konstruktion aus der Vorlesung ebenfalls Chirurgien entlang von Legendre-Knoten in 3-dimensionalen Kontaktmannigfaltigkeiten mit Rahmung $+1$ bzgl. der Kontaktrahmung realisieren kann.

Abgabe: Mittwoch 04.07.07 in der Vorlesung.