Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, deren Richtungsableitungen $D_v f(a)$, $D_v g(a)$ existieren für ein $a \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Verifizieren Sie die Summen-, Produkt- und Quotientenregel für die Richtungsableitung, d.h. die Richtungsableitungen $D_v(f \pm g)(a)$, $D_v(fg)(a)$ und, falls $g \neq 0$ in einer Umgebung von a, $D_v(f/g)(a)$ existieren, und es gilt

$$\begin{aligned}
D_v(f \pm g)(a) &= D_v f(a) \pm D_v g(a), \\
D_v(fg)(a) &= D_v f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot D_v g(a), \\
D_v(f/g)(a) &= \frac{D_v f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot D_v g(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Seien D eine offene Menge im $\mathbb{R}^3$ und $v = (v_1, v_2, v_3)\colon D \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Die **Rotation** von v ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

(formal $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$). Seien v und $f\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) - (\triangle v_1, \triangle v_2, \triangle v_3)$, wobei $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der **Laplace Operator** ist.

Dabei darf verwendet werden, daß bei einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion die partiellen Ableitungen miteinander kommutieren, d.h. ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Abgabe: Freitag 11.04.08

(Ort wird noch bekanntgegeben)