SS 2008 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ auf der Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 2, \ |y| \leq 2, \ (x-1)^3 - y^2 = 0\}.$$

(b) Man bestimme den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einbeschrieben ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion. Warum heißt die dadurch im $\mathbb{R}^3$ gegebene Fläche **Affensattel**?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x,y) = (2,5)$ durch eine C^1-Abbildung

$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$$

mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die Ableitung dieser Abbildung im Punkt $(x,y) = (2,5)$.

Aufgabe 4. Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben. Dann hat die Summe der Abstandsquadrate

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - a_j\|^2$$

ein Minimum im Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j$ des Punktesystems.

b.w.

Bonusaufgabe 1. Das folgende Beispiel von Peano zeigt, daß eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$ in einem Punkt p kein lokales Minimum haben muß, selbst wenn ihre sämtlichen Beschränkungen auf die Geraden durch p dort lokale Minima haben:

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Dann gilt

(a) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, hat die Funktion $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(at, bt)$ in $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum.

(b) Die Funktion f hat in $(0, 0)$ kein lokales Minimum. Wo ist $f > 0$, wo $f < 0$?

Bonusaufgabe 2. Eine Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph** genau dann, wenn es zu jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ eine in z_0 stetige Funktion $\triangle(z)$ gibt mit $h(z) = h(z_0) + (z - z_0) \cdot \triangle(z)$. Seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ via $(x, y) \longmapsto x + iy$ und definiere $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

u heißt der **Realteil** von f, und v der **Imaginärteil**. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist holomorph genau dann, wenn die **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

gelten.

(b) In diesem Falle gilt $\triangle u = \triangle v = 0$.

(c) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie diese holomorphe Funktion.

Abgabe: Freitag 02.05.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).