SS 2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

(a) Verwenden Sie die Beziehung zwischen Differentialgleichungen der Ordnung n auf $\mathbb{R}$ und Differentialgleichungen erster Ordnung auf $\mathbb{R}^n$ um zu zeigen, daß sich der Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^n$ wie folgt in ein Lösungsverfahren der Gleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = b(t) \qquad (\star)$$

($a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $b \in C^0(\mathbb{R})$) übersetzt: Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

so ist $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ eine Lösung von $(\star)$, wobei die Funktionen $u_i \in C^1(\mathbb{R})$ mittels der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \dot{\alpha}_1 & \cdots & \dot{\alpha}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(n-1)} & \cdots & \alpha_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

gefunden werden.

(b) Finden Sie mittels des in (a) beschriebenen Verfahrens eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A e^{i\omega_0 t},$$

mit A, ω, $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$. Beschreiben Sie das unterschiedliche qualitative Verhalten der Lösung, je nachdem ob $\omega_0 = \omega$ oder $\omega_0 \neq \omega$.

Aufgabe 2. Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + xy - y - z \\ g(x,y,z) &= 2x^2 + 3xy - 2y - 3z. \end{aligned}$$

Dann ist

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, und $t \longmapsto (t, t^2, t^3)$ ist eine globale Karte von C.

b.w.

Aufgabe 3. Seien $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Ein System aus zwei Massenpunkten im festen Abstand a kann sich im $\mathbb{R}^2$ so bewegen, daß die Position $x = (x_1, x_2)$ des ersten Massenpunktes immer $x_1^2 - x_2^2 = b$ erfüllt. Beschreiben Sie den Konfigurationsraum M des Systems als Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie, für welche $b \in \mathbb{R}$ der Konfigurationsraum M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Wert $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ heißt **regulär**, falls $J_f(a)$ Rang $n-k$ hat für alle $a \in f^{-1}(c)$, mit anderen Worten, wenn das Differential $d_a f$ surjektiv ist für alle $a \in f^{-1}(c)$. In diesem Fall ist $f^{-1}(c)$, sofern $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ gilt, eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen, $\mathcal{S}$ der Vektorraum der symmetrischen $n \times n$ Matrizen, und E bezeichne die $n \times n$ Einheitsmatrix. Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ ist die Menge

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^t A = E\}.$$

Durch Betrachtung der Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^{n\times n} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & A & \longmapsto & A^t A \end{array}$$

zeige man, daß $\mathrm{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist. (**Hinweis:** Beachten Sie, daß für eine differenzierbare Kurve $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ aufgrund der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{ds}(f \circ \gamma)(s_0) = d_{\gamma(s_0)} f(\gamma'(s_0)).$$

Betrachten Sie Kurven der Form $\gamma(s) = A + sB$ mit $A \in \mathrm{O}(n)$. Wie muß B gewählt werden, damit $d_A f(B)$ gleich einem gegebenen $C \in \mathcal{S}$ wird?)

(b) Die Lorentz-Gruppe $\mathrm{O}(3,1)$, die in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt, ist die Gruppe der reellen 4×4 Matrizen A, die der Gleichung $A^t D A = D$ genügen, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1, 1, 1, -1)$ ist. Zeigen Sie, daß $\mathrm{O}(3,1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{4\times 4}$ ist.

Abgabe: Freitag 13.06.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).