SS 2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 11

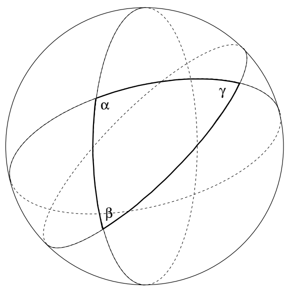
Aufgabe 1. Berechnen Sie die Flächeninhalte der folgenden Flächen im $\mathbb{R}^3$:

(a) Paraboloid: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$,

(b) Kegel: $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

Hinweis: Es bietet sich an, Polarkoordinaten (r, φ) in der xy-Ebene zur Parametrisierung dieser Flächen zu verwenden.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß ein von drei Großkreisen auf S^2 berandetes sphärische Dreieck mit den Winkeln α, β, γ den Flächeninhalt $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ hat. Diese Zahl heißt der **sphärische Exzeß** des Dreiecks.



Hinweis: Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen zwei Großkreisen? Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann aus einer elementargeometrischen Überlegung.

Aufgabe 3. Auf $\mathbb{R}^3$ seien die 1-Formen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz \\ \omega_2 &= \omega_1 + 2xy\, dz \end{aligned}$$

gegeben. Welche der Formen ist geschlossen? Welche der Formen ist exakt? Berechnen Sie die Integrale von ω_1 bzw. ω_2 entlang der Kurve

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, ct)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei $\mathbf{v}$ ein konservatives Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe eine Funktion $\Phi \in C^1(U)$, so daß $\mathbf{v}(p) = -\mathrm{grad}\,\Phi(p) \in T_pU$ für jedes $p \in U$.

Weiter sei $\gamma \in C^2([a,b], U)$ eine Kurve in U, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz

$$\ddot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(\gamma(t)), \quad t \in [a,b],$$

genügt. Man beweise den Energiesatz

$$\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \Phi((\gamma(t)) \equiv \text{konst.}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\Phi(\gamma(t_2)) - \Phi(\gamma(t_1))$ für $t_1, t_2 \in [a,b]$.

Abgabe: Freitag 27.06.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).