SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4} dx \, , \qquad (b) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx \, .$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{(a+\cos x)(a-\sin x)} dx \, , \qquad a \in (1,\infty) \, .$$

Aufgabe 3. Sei $f = p/q$ eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$, wobei das Polynom q keine reellen Nullstellen habe und der Grad von q um genau 1 größer sei als der Grad von p. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme reeller Methoden, daß der Grenzwert

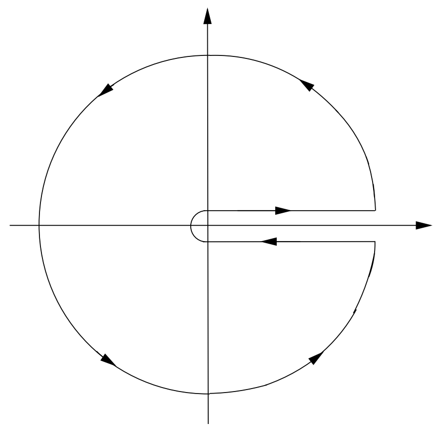
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx$$

existiert und bestimmen Sie die Differenz

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx - 2\pi i \sum_{\{a\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im} a>0\}} \operatorname{Res}_a f \, .$$

Aufgabe 4. Sei $f = p/q$ eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$, wobei das Polynom q nun keine nicht-negativen reellen Nullstellen habe und der Grad von q um mindestens 2 größer sei als der Grad von p. Leiten Sie eine Residuenformel für $\int_0^\infty f(x)\, dx$ durch Anwendung des Residuensatzes auf die Funktion $z \mapsto f(z) \log z$ her, wobei log den Zweig des Logarithmus auf der längs der positiven reellen Halbachse geschlitzten Ebene bezeichne mit $\log(-1) = i\pi$.

Hinweis: Wählen Sie dazu folgenden Integrationsweg γ_r, und bilden Sie den Grenzwert $r \to \infty$: Der Weg γ_r entstehe aus zwei konzentrischen Kreisen um den Ursprung mit Radien $r > 1$ und $1/r$, welche durch zwei zur reellen Achse parallelen Strecken wie im Bild verbunden seien.



Abgabe: Donnerstag 01.07.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI