SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgende Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und (f_n) eine Folge von auf G holomorphen und auf dem Abschluß $\overline{G}$ setigen Funktionen. Die Folge $(f_n|_{\overline{G}\setminus G})$ sei gleichmäßig konvergent. Dann konvergiert die Folge (f_n) auf $\overline{G}$ gleichmäßig gegen eine Funktion, die auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete Fassung des Maximumprinzips.

Aufgabe 2. Folgern Sie aus Aufgabe 1:

(a) Sei $A \subset G$ eine diskrete Teilmenge und $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine Folge, die auf $G\setminus A$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert die Folge auf ganz G lokal gleichmäßig.

(b) Sei $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine Folge und $(g_n) \subset \mathcal{O}(G)$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge mit Grenzfunktion g, die nicht die Nullfunktion ist, und so daß die Folge der Produktfunktionen $g_n f_n$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert auch (f_n) lokal gleichmäßig.

Aufgabe 3. Für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ konstruiere man ein Beispiel einer auf $D_1(0)$ lokal gleichmäßig konvergenten Folge (f_n) holomorpher Funktionen mit nichtkonstanter Grenzfunktion f mit der Eigenschaft, daß jedes f_n genau k Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) hat, aber f selbst keine Nullstellen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß für $\operatorname{Re} z > 1$ durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

eine holomorphe Funktion definiert ist, wobei $n^z := \exp(z \log n)$. Diese Funktion heißt **Riemannsche Zetafunktion** und spielt u.a. in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle. Finden Sie eine Reihendarstellung für die Ableitung $\zeta'(z)$.

Abgabe: Donnerstag 15.07.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI