SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Bitte vermerken Sie Ihre Gruppennummer auf Ihren Abgabeblättern!

Aufgabe 1. Sei f eine ganze Funktion. Es gebe eine natürliche Zahl m und positive Konstanten M, R, so daß $|f(z)| \leq M|z|^m$ für alle komplexen Zahlen z mit $|z| \geq R$ gilt. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist.

Aufgabe 2. Sei f eine ganze, nichtkonstante Funktion. Zeigen Sie, daß die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Aufgabe 3.

(a) Sei f eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie, daß die Potenzreihenentwicklung von f um 0 nur reelle Koeffizienten hat. Insbesondere gilt also $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

(b) Seien f eine ganze Funktion und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Zeigen Sie, daß g die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf $\mathbb{C}$ erfüllt, also wieder eine ganze Funktion ist. Geben Sie damit ein alternatives Argument für (a).

Aufgabe 4. Seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Weiter sei $a \in \partial B_r(0)$ die einzige Nullstelle von g in der abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(0)} \subset U$ vom Radius $r > 0$, und es gelte $g'(a) \neq 0$ und $f(a) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a \, ,$$

wobei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f/g um 0 ist.

Bonusaufgabe.

(a) Zeigen Sie, daß eine auf einem Sterngebiet holomorphe Funktion dort eine Stammfunktion besitzt.

(b) Sei $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \leq 0\ ,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ die längs der nichtpositiven reellen Achse geschlitzte Ebene. Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}^-$ ein Sterngebiet mit Zentrum 1 ist, d.h. daß für jedes $z \in \mathbb{C}^-$ die abgeschlossene Strecke $[1, z]$ von 1 nach z ganz in $\mathbb{C}^-$ liegt.

(c) Berechnen Sie für $z \in \mathbb{C}^-$

$$F(z) = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

und verifizieren Sie direkt, daß F eine Stammfunktion von $z \mapsto 1/z$ ist.

Hinweis: Wählen Sie einen geeigneten Integrationsweg, der das gleiche Ergebnis wie die Integration entlang $[1, z]$ liefert.

Abgabe: Donnerstag 06.05.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI