SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (a) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, d.h. eine Menge X mit einem System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, die wir offene Mengen nennen, mit den Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(ii) Falls $U, V \in \mathcal{O}$, dann auch $U \cap V \in \mathcal{O}$.

(iii) Falls $U_\alpha \in \mathcal{O}$ für alle $\alpha \in A$, wobei A eine beliebige Indexmenge ist, so auch $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

Sei $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $\mathcal{O}_M$ die **Relativ-Topologie** oder **induzierte Topologie**, d.h. für eine Teilmenge $V \subset M$ gilt $V \in \mathcal{O}_M$ genau dann, wenn es ein $U \in \mathcal{O}$ gibt, so daß $V = M \cap U$. Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Topologie auf M definiert.

(b) Sei $\mathcal{O}$ die gewöhnliche Topologie auf dem $\mathbb{R}^2$. Dann ist die auf $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$ induzierte Topologie die gewöhnliche Topologie des $\mathbb{R}^1$.

Aufgabe 2. (a) Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$x \longmapsto \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

einen Diffeomorphismus des Intervalles $(-a, a)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Konstruieren Sie analog einen Diffeomorphismus des offenen Balles

$$B_a := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < a\}$$

auf den ganzen $\mathbb{R}^n$.

(c) Ist jede bijektive, differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es bezeichne $[x] \in X/\!\sim$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$ im Quotientenraum $X/\!\sim$ aller solcher Äquivalenzklassen. Mit $\pi \colon X \to X/\!\sim$ sei die Quotientenabbildung $x \mapsto [x]$ bezeichnet. Eine Teilmenge $U \subset X/\!\sim$ heißt **offen in der Quotiententopologie** genau dann, falls $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X.

(a) Dies definiert in der Tat eine Topologie auf $X/\!\sim$.

(b) Dies ist die feinste Topologie auf $X/\!\sim$ (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig ist.

b.w.

Aufgabe 4. (a) In einem Hausdorff-Raum sind einpunktige Mengen abgeschlossen.

(b) Sei X ein Hausdorff-Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Eine notwendige Bedingung für die Hausdorff-Eigenschaft des Quotientenraumes $X/\sim$ ist die Abgeschlossenheit aller Äquivalenzklassen in X.

(c) Hier ist ein Beispiel, das zeigt, daß die Bedingung in (b) nicht hinreichend ist. Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Topologie. Definiere zwei Äquivalenzrelationen wie folgt:

(1) $(x, y) \sim_1 (x', y')$ genau dann, falls

- $x = x' \leq -\pi/2$, oder
- $x = x' \geq \pi/2$, oder
- $x, x' \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $y - \tan x = y' - \tan x'$.

(2) $(x, y) \sim_2 (x', y')$ genau dann, falls

- $x = x' \leq -\pi/2$, oder
- $x = x' \geq \pi/2$, oder
- $x, x' \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $y - x \tan x = y' - x' \tan x'$.

Zeichnen Sie die Äquivalenzklassen in $\mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, daß diese allesamt abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind. Begründen Sie, welcher der Quotientenräume $X/{\sim_1}$ und $X/{\sim_2}$ Hausdorffsch ist.

Abgabe: Montag 11.04.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI