SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Unter einer Gruppenwirkung einer Gruppe G auf einer Menge X versteht man eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g(x)$, mit $e(x) = x$ für das Einselement $e \in G$ und alle $x \in X$, und $g(h(x)) = (gh)(x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Die spezielle orthogonale Gruppe SO(3) wirkt auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(3) & \times & S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ (\alpha & , & p) & \longmapsto & \alpha(p) \end{array}$$

(a) Dies induziert eine Wirkung auf dem Einheitstangentialbündel T_1S^2 durch

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(3) & \times & T_1S^2 & \longrightarrow & T_1S^2 \\ (\alpha & , & X) & \longmapsto & T\alpha(X) \end{array}$$

(b) Sei X_0 ein fest gewählter Einheitsvektor in einem Punkt $p_0 \in S^2$. Dann definiert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & T_1S^2 \\ \alpha & \longmapsto & T\alpha(X_0) \end{array}$$

einen Diffeomorphismus.

Aufgabe 2. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \longrightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Das Differential $Tf\colon TM \longrightarrow TN$ von f ist differenzierbar.

(b) Ist M zusammenhängend und das Differential Tf von f überall Null, so muß f konstant sein.

(c) Ist f eine Einbettung, so auch Tf.

Aufgabe 3. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist differenzierbar genau dann, wenn $g \circ f \in C^\infty(M)$ gilt für jede Funktion $g \in C^\infty(N)$.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Beschreiben Sie eine differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ mit der Eigenschaft, daß die Menge

$$f(\{t \in \mathbb{R} : t \geq k\})$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ ganz $\mathbb{Q}^q$ enthält.

(b) Es gibt eine stetige Funktion $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, so daß es keine Einbettung $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ gibt mit $|f - g| < \delta$.

(Die allgemeine Aussage hinter dieser Aufgabe ist die, daß Einbettungen in der sogenannten starken Topologie i.a. nicht dicht sind im Raum aller differenzierbaren Abbildungen.)

Abgabe: Montag 9.05.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI