SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine injektive differenzierbare Abbildung $f\colon\ S^1 \to \mathbb{R}^2$, so daß das Bild $f(S^1)$ gleich der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \max(|x|,|y|) = 1\}$ ist.

Aufgabe 2. Sei M eine kompakte m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f\colon\ M \to \mathbb{R}^{2m}$ eine Immersion. Mit $\mathbb{R}^{2m-1}$ bezeichnen wir den Teilraum $\{x_{2m} = 0\} \subset \mathbb{R}^{2m}$. Für einen Tangentialvektor $X \in T_pM$ können wir dann $T_pf(X) \in T_{f(p)}\mathbb{R}^{2m}$ als Vektor im $\mathbb{R}^{2m}$ auffassen. Das Einheitstangentialbündel von M (bezüglich einer fest gewählten Riemannschen Metrik auf M) sei mit T_1M bezeichnet; dies ist eine kompakte $(2m-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie die differenzierbare Abbildung $F\colon\ T_1M \to S^{2m-1}$, die dem Einheitstangentialvektor $X \in T_pM$ den Einheitsvektor $T_pf(X)/\|T_pf(X)\|$ zuordnet.

(a) Sei $v \in S^{2m-1} \cap (\mathbb{R}^{2m} \setminus \mathbb{R}^{2m-1})$ ein regulärer Wert der Abbildung F. Dann ist $F^{-1}(v) \subset T_1M$ eine endliche Teilmenge.

(b) Mit π_v sei die Projektion $\mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m-1}$ längs v bezeichnet, mit $\pi\colon\ T_1M \to M$ die Bündelprojektion. Zeigen Sie, daß $\pi_v \circ f$ außerhalb der endlichen Teilmenge $\pi(F^{-1}(v))$ eine Immersion ist.

(c) Die Ausnahmepunkte in (b) heißen *Kreuzhauben*. Whitney hat gezeigt, daß das Modell einer Kreuzhaube für $m = 2$ gegeben ist durch

$$(x,y) \longmapsto (x, xy, y^2).$$

Verifizieren Sie, daß dies außerhalb des Ursprunges in der Tat eine Immersion ist, und zeichnen Sie das Bild dieser Abbildung.

Aufgabe 3. Angenommen, $f\colon\ D^n \to D^n$ ist ein fixpunktfreie stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß man dann auch eine fixpunktfreie differenzierbare Abbildung $g\colon\ D^n \to D^n$ konstruieren könnte. (Dies liefert einen alternativen Weg, die Existenz eines solchen f auszuschließen, da die Konstruktion aus der Vorlesung angewandt auf g direkt eine differenzierbare Retraktion $D^n \to S^{n-1}$ liefern würde.)

b.w.

Aufgabe 4. Sei $\Phi\colon\ M \times \mathbb{R} \to M$ ein dynamisches System, d.h. mit $\Phi_t(p) := \Phi(p,t)$ gilt $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.

(a) Der Fluß des differenzierbaren Vektorfeldes X auf M definiert durch $X_p := \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(p,t)$ ist gleich Φ.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer kompakten Mannigfaltigkeit M und einer injektiven Immersion $\mathbb{R} \to M$, deren Bild nicht Flußlinie eines dynamischen Systems auf M sein kann.

(c) Jede zu S^1 diffeomorphe Untermannigfaltigkeit einer beliebigen Mannigfaltigkeit M ist Flußlinie eines geeigneten dynamischen Systems.

Abgabe: Montag 16.05.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI