SS 2011 Prof. Hansjörg Geiges

Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Geben Sie ein explizites Beispiel eines Vektorfeldes auf $\mathbb{R} \times [0,1]$ an, dessen zweite Komponente konstant gleich 1 ist, das aber keine Diffeotopie von $\mathbb{R}$ induziert. Statt des Vektorfeldes können Sie auch den entsprechenden Fluß auf $\mathbb{R} \times [0,1]$ angeben. Qualitativ wurde ein solches Beispiel schon in der Vorlesung beschrieben.

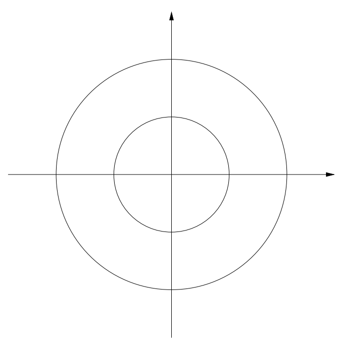
Aufgabe 2. (a) Konstruieren Sie eine Einbettung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Bild $f(\mathbb{R}) = (0,1)$.

(b) Geben Sie explizit eine Isotopie der Einbettung

$$(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (t,0)$$

an, die nicht zu einer ambienten Isotopie erweitert.

Aufgabe 3. Es bezeichne $S^1 + S^1$ die differenzierbare Summe zweier Kopien von S^1, d.h. die disjunkte Vereinigung mit der offensichtlichen Mannigfaltigkeitsstruktur. Betrachten Sie die Einbettung $S^1 + S^1 \to \mathbb{C}$, die auf dem ersten Summanden durch die übliche Inklusion $S^1 \subset \mathbb{C}$, auf dem zweiten durch $z \mapsto 2z$ gegeben ist.

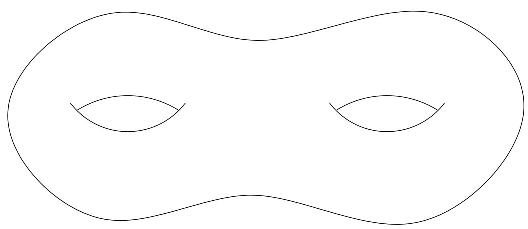


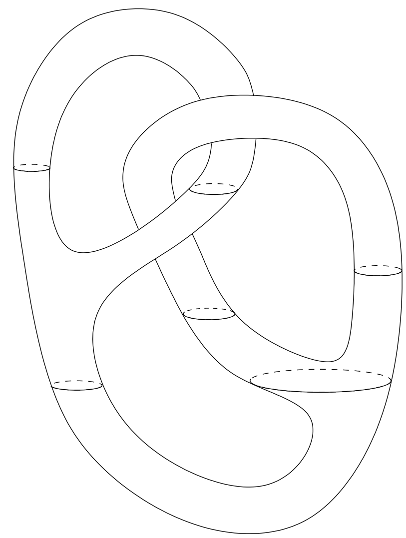
Durch

$$\begin{array}{rccccc} F_t\colon & S^1 & + & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & e^{2\pi i\varphi} & & & \longmapsto & e^{2\pi i(\varphi+t)} \\ & & & e^{2\pi i\theta} & \longmapsto & 2e^{2\pi i(\theta-t)} \end{array},$$

$t \in [0,1]$, ist eine Isotopie dieser Einbettung definiert. Erweitern Sie F_t explizit zu einer ambienten Isotopie.

Aufgabe 4. Die folgenden Bilder zeigen zwei Einbettungen der orientierten, geschlossenen Fläche vom Geschlecht 2 in den $\mathbb{R}^3$:





Sind diese Einbettungen isotop?

Aufgabe 5. Es soll gezeigt werden, daß die Inklusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann isotop zur antipodalen Einbettung $S^n \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist, wenn n ungerade ist. Konstruieren Sie dazu für ungerades n explizit die Isotopie. Für gerades n argumentieren Sie durch Widerspruch mittels des Isotopieerweiterungssatzes (angewandt auf eine angenommene Isotopie) und der Tatsache, daß die Abbildung $x \mapsto -x$ in diesem Fall eine auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ definierte orientierungsumkehrende Abbildung ist.

Bemerkung: Die Inklusion $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist homotop via Immersionen zur antipodalen Einbettung, d.h. man kann die 2-Sphäre "umstülpen" (mit Selbstdurchdringungen), ohne dabei Singularitäten zu erzeugen. Dies ist das sogenannte *Smale-Paradox*, vergleiche H. Geiges, *h*-Principles and Flexibility in Geometry, *Memoirs of the American Mathematical Society* **164** (2003).

Abgabe: Montag 27.06.11
Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI