SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei M_i eine zusammenhängende m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f_i\colon \mathbb{R}^m \to M_i$ eine Einbettung, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, daß die verbundene Summe $M_1 \# M_2(f_1, f_2)$ diffeomorph ist zu der Randverheftung

$$\big(M_1 \setminus f_1(\frac{1}{2}\mathrm{Int}(D^m))\big) \cup_\varphi \big(M_2 \setminus f_2(\frac{1}{2}\mathrm{Int}(D^m))\big),$$

wobei

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & f_1(\frac{1}{2}\partial D^m) & \longrightarrow & f_2(\frac{1}{2}\partial D^m) \\ & x & \longmapsto & f_2 \circ f_1^{-1}(x). \end{array}$$

Aufgabe 2. Läßt sich die verbundene Summe einer endlichen Anzahl von Kopien von $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ einbetten?

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß der reell projektive Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist.

(b) Sei n ungerade und M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeigen Sie, daß der Diffeomorphietyp von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \# M$ unabhängig von der Wahl der Orientierungen auf den beiden Summanden ist.

Aufgabe 4. Sei (E, π, M) ein differenzierbares Vektorbündel vom Rang k, d.h. die Dimension der Fasern E_p, $p \in M$, ist k. Bezeichne mit $P(E)$ die Menge der 1-dimensionalen Teilräume der Fasern von E. Schreibe $[v] \in P(E)$ für den durch $v \in E_p \setminus \{0\}$ repräsentierten Teilraum der Faser E_p. Die natürliche Projektion $P(E) \to M$, $[v] \mapsto \pi(v)$ sei mit π_P bezeichnet.

Zeigen Sie:

(a) $P(E)$ trägt in natürlicher Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Projektion π_P gibt $P(E)$ die Struktur eines Bündels über M mit Faser $\mathbb{R}\mathrm{P}^{k-1}$.

(b) Durch

$$\eta(E) := \big\{ \big([v], \lambda v\big) \in P(E) \times E \colon\ v \in E \setminus \{\text{Nullschnitt}\}, \lambda \in \mathbb{R} \big\}$$

und die Projektion

$$\begin{array}{cccc} \pi_\eta \colon & \eta(E) & \longrightarrow & P(E) \\ & \big([v], \lambda v\big) & \longmapsto & [v] \end{array}$$

ist ein Geradenbündel über $P(E)$ definiert, das sogenannte *kanonische Geradenbündel* (vergl. Übungsblatt 8).

(c) Durch die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \eta(E) & \longrightarrow & E \\ \big([v], \lambda v\big) & \longmapsto & \lambda v \end{array}$$

ist ein Diffeomorphismus

$$\eta(E) \setminus \{\text{Nullschnitt}\} \longrightarrow E \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$$

gegeben; das Urbild des Nullschnittes $M \subset E$ unter dieser kanonischen Abbildung ist $P(E)$. Man sagt: $\eta(E)$ entsteht aus E durch *Aufblasen* des Nullschnittes.

Abgabe: Montag 4.07.11

Bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI