SS 2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^a t^3 e^{t^2}\,dt$ auf beide der folgenden Weisen:

(a) durch partielle Integration,

(b) durch Betrachten der Funktion $F(x) = \int_0^a t e^{xt^2}\,dt$.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$g\colon\ [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,t)\longmapsto g(x,t),$$

mit deren Hilfe eine Funktion $G\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ durch $G(x) = \int_a^x g(x,t)\,dt$ definiert wird. Zeigen Sie, daß G differenzierbar ist, und daß folgende Gleichung gilt:

$$G'(x) = g(x,x) + \int_a^x \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Aufgabe 3. Sei $\Delta\colon\ C^2(\mathbb{R}^2)\to C^0(\mathbb{R}^2)$ der Laplace-Operator auf dem $\mathbb{R}^2$ (vergl. Übungsblatt 1), d.h. für eine zweifach stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y)$ ist Δf die stetige Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Ist $\phi\colon\ U\to V$ ein C^2-Diffeomorphismus von offenen Mengen $U,V\subset\mathbb{R}^2$, so kann man einen neuen Differentialoperator $\widetilde{\Delta}$ auf U definieren durch die Gleichung

$$(\Delta f)\circ\phi = \widetilde{\Delta}(f\circ\phi).$$

Dies entspricht dem folgenden kommutativen Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc}
C^2(V) & \xrightarrow{\Delta} & C^0(V) \\
{\scriptstyle f\mapsto f\circ\phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g\mapsto g\circ\phi} \\
C^2(U) & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} & C^0(U)
\end{array}$$

Interpretiert man ϕ als einen Koordinatenwechsel, so ist $\widetilde{\Delta}$ nichts anderes als der Laplace-Operator bezüglich der neuen Koordinaten.

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Laplace-Operator in Polarkoordinaten zu beschreiben. Sei dazu ϕ der Koordinatenwechsel von Polarkoordinaten (r,φ) zu kartesischen Koordinaten (x,y), d.h.

$$\phi(r,\varphi) = (x,y)\quad\text{mit}\quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

mit $U = \mathbb{R}^+\times(-\pi,\pi)$ und $V = \mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\colon\ x\le 0,\ y=0\}$.

b.w.

(a) Berechnen Sie mittels der Kettenregel die Ableitungen $(f \circ \phi)_r$ und $(f \circ \phi)_\varphi$, und zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f_x \circ \phi &= (f \circ \phi)_r \cdot \cos\varphi - (f \circ \phi)_\varphi \cdot \frac{1}{r} \sin\varphi, \\ f_y \circ \phi &= (f \circ \phi)_r \cdot \sin\varphi + (f \circ \phi)_\varphi \cdot \frac{1}{r} \cos\varphi. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, daß der Laplace-Operator in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir an einem Beispiel zeigen, daß die Existenz der iterierten Integrale nicht ausreicht, um den Satz von Fubini zu gewährleisten, daß also eine Bedingung wie die Stetigkeit des Integranden auf dem abgeschlossenen Rechteck unerläßlich ist.

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx$, wobei y ein reeller Parameter im offenen Intervall $(0,1)$ ist.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy,$$

d.h. den Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy.$$

(c) Zeigen Sie, möglichst ohne weiteres Rechnen, daß

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy \right) dx.$$

Aufgabe 5. Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der Teilmengen

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 6\} \ \text{ und } \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ (x-1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge C läßt sich überall lokal als Graph in einer der drei Variablen schreiben, also z.B. in der Form $(y,z) = g(x)$ mit einer geeigneten differenzierbaren Abbildung $g\colon U_0 \to V_0$, wobei $U_0 \times V_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung eines Punktes $(x_0, y_0, z_0) \in C$ ist. Mit anderen Worten, C läßt sich lokal als differenzierbare Kurve, z.B. $U_0 \ni x \mapsto \gamma(x) := (x, g(x)) \in \mathbb{R}^3$ schreiben.

(b) Berechnen Sie die Tangente an C im Punkt $p = (1,1,1) \in C$, d.h. die Gerade durch p, die durch den Geschwindigkeitsvektor an diesem Punkt in einer lokalen Beschreibung als differenzierbare Kurve gegeben ist.

Abgabe: Montag 23.4.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.