SS 2012 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Der $\mathbb{R}^n$ sei durch die Hyperebene

$$H := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}$$

in zwei Halbräume H_+ und H_- zerlegt, in denen die Lichtgeschwindigkeit die konstanten Werte c_+ bzw. c_- hat. Gegeben seien zwei Punkte $\mathbf{a}_+ \in H_+$ und $\mathbf{a}_- \in H_-$. Wo liegt der Punkt $\mathbf{x} \in H$, für den die Zeit

$$t(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_+\|}{c_+} + \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_-\|}{c_-},$$

die der Lichtstrahl benötigt, um von $\mathbf{a}_-$ über $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{a}_+$ zu gelangen, minimal wird? Zeigen Sie, daß dies im Fall $n = 2$ auf das klassische Snelliussche Brechungsgesetz führt (vergl. Mathematik I, Übungsblatt 7).

Aufgabe 2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir betrachten das **Ellipsoid**

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ h(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Die **Tangentialebene** T an M in einem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$ ist definiert als die affine Ebene durch (x_0, y_0, z_0), die orthogonal zum Gradienten von h in diesem Punkt steht. Im folgenden sei stets angenommen, daß die drei Koordinaten x_0, y_0, z_0 positiv sind.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T durch $(x_0, y_0, z_0) \in M$.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A, B, C von T mit den drei Koordinatenachsen.

(c) Die affine Ebene T schneidet aus dem ersten Oktanten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ein Tetraeder mit den vier Ecken A, B, C und Ursprung aus, d.h. die vier Dreieckseiten dieses Tetraeders liegen in den Koordinatenebenen bzw. in der Tangentialebene. Zeigen Sie, daß das Volumen dieses Tetraeders gegeben ist durch

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(abc)^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

Dabei dürfen Sie verwenden, daß das Volumen eines Tetraeders (oder allgemeiner einer Pyramide) gegeben ist durch

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$$

(d) Finden Sie den Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$, für den dieses Volumen V minimal wird. Zeigen Sie, daß es sich dabei um den Schwerpunkt des entsprechenden Dreieckes ABC handelt.

b.w.

Aufgabe 3. Für die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + 4z \\ x - 5y + 3z \end{pmatrix}$$

bestimme man die Matrix A bezüglich der Basen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ des } \mathbb{R}^3 \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ des } \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie durch Betrachtung des charakteristischen Polynoms, daß eine reelle symmetrische 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Sei $A := (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit $n = 2$ bzw. $n = 3$. Schreiben Sie das charakteristische Polynom χ_A explizit als Polynom $t^2 + b_1 t + b_0$ bzw. $t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$, mit den b_k gegeben durch algebraische Ausdrücke in den a_{ij}. Zeigen Sie, daß

$$A^2 + b_1 A + b_0 E = 0 \text{ für } n = 2$$

bzw.

$$A^3 + b_2 A^2 + b_1 A + b_0 E = 0 \text{ für } n = 3.$$

Dies sind Spezialfälle des Satzes von **Cayley-Hamilton**, der ganz allgemein besagt, daß Einsetzen einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) in ihr charakteristisches Polynom den Nullhomomorphismus liefert.

Abgabe: Freitag 4.5.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.