SS 2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematatik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix und $\lambda \neq \pm 1$ ein komplexer Eigenwert von A. Sei $z \in \mathbb{C}^n$ ein dazugehöriger komplexer Eigenvektor. Beweisen Sie, daß

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = 0.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix in $\mathbb{C}^{4\times 4}$. Dazu ist es nicht notwendig, die Basistransformation explizit auszurechnen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß f eine Drehung ist. Man bestimme die Drehachse sowie den Drehwinkel.

Aufgabe 4. Die potentielle Energie einer linearen Kette von $n+1$ mit Federn verbundener Teilchen mit Koordinaten $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, ist gegeben durch

$$V = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j - a)^2,$$

wobei $a \in \mathbb{R}^+$ die Ruhelänge der Federn und $\kappa \in \mathbb{R}^+$ die Federkonstante bezeichnet. Es sei $x_0 = 0$ fest. Schreiben Sie dieses Potential als Funktion der Auslenkungen $y_j = x_j - ja$, $j = 1, \ldots, n$ aus den Ruhelagen der Teilchen und zeigen Sie, daß dadurch eine positiv definite quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Was ist die Matrix dieser quadratischen Form?

b.w.

Aufgabe 5. Die potentielle Energie für drei gekoppelte Teilchen gleicher positiver Masse m in linearer Anordnung (Ozon-Molekül) als Funktion der 1-dimensionalen Auslenkungen x_i aus den Ruhelagen ist

$$V(x_1, x_2, x_3) = \mu\frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + \mu\frac{(x_3 - x_2)^2}{2}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}^+$.

(a) Führen Sie die Hauptachsentransformation für die quadratische Form V durch.

(b) Transformieren Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen $m\ddot{x} = -\text{grad}\, V$ in die neuen Koordinaten y aus (a) bezüglich derer die quadratische Form V diagonalisiert ist.

(c) Suchen Sie nach Lösungen der Form $y(t) = a\cos(\omega t+c)$ mit $a \in \mathbb{R}^3, \omega, c \in \mathbb{R}$ und $y(t) = at+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^3$ für diese Bewegungsgleichungen.

(d) Interpretieren Sie die Eigenvektoren der Matrix, die die quadratische Form V beschreibt, mittels der entsprechenden Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie mit dem iterativen Verfahren aus der Vorlesung eine Lösung α der Differentialgleichung

$$\dot{x} = 3t^2x,$$

mit Anfangsbediungung $\alpha(0) = x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Abgabe: Freitag 18.5.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.