SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß durch die Abbildungsvorschriften

$$\alpha(x,y) := (x+1,y) \text{ und } \beta(x,y) := (-x+1,y+1)$$

eine Operation der endlich präsentierten Gruppe

$$G := \langle a,b | b^{-1}aba \rangle$$

auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie damit, daß die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche isomorph zu G ist (vergl. Aufgabe 2(b) auf Übungsblatt 2). Überlegen Sie sich dazu, daß jedes Element von G in der Form $a^k b^l$ mit $k,l \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann, und benutzen Sie dies, um zu verifizieren, daß durch $a \mapsto \alpha$, $b \mapsto \beta$ ein *injektiver* Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen des $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(c) Beschreiben Sie eine Henkelzerlegung der Kleinschen Flasche, die der Präsentation G der Fundamentalgruppe entspricht.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie algebraisch, daß die endlich präsentierten Gruppen

$$\langle a,b \,|\, b^{-1}aba \rangle \text{ und } \langle c,d \,|\, c^2d^2 \rangle$$

isomorph sind. (Diese Aussage folgt topologisch daraus, daß beides Präsentationen der Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche sind.)

(b) Zeigen Sie algebraisch, daß die endlich präsentierten Gruppen

$$\langle a,b,c \,|\, aba^{-1}b^{-1}c^2 \rangle \text{ und } \langle c_1,c_2,c_3 \,|\, c_1^2c_2^2c_3^2 \rangle$$

isomorph sind. (Diese Aussage folgt topologisch daraus, daß beides Präsentationen der Fundamentalgruppe von $T^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ sind.)

Aufgabe 3. Betrachten Sie folgende Beispiele eines Kreises C in einer Fläche F:

(i) F sei das Möbiusband und C seine Randkurve,

(ii) $F = S^1 \times S^1$ sei der Torus und $C = \{(x,y) \in S^1 \times S^1 \colon\ x = y\}$ der Diagonalkreis,

(iii) F sei der Zylinder und C eine seiner Randkurven.

Wählen Sie in jedem dieser Fälle einen Basispunkt in C, beschreiben Sie Erzeuger für die Fundamentalgruppe von C und F, sowie den durch die Inklusion $C \to F$ induzierten Homomorphismus von Fundamentalgruppen.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $f\colon\ S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definiere wie in der Vorlesung

$$X \cup_f D^2 = (X + D^2)/x \sim f(x) \text{ für } x \in S^1 = \partial D^2.$$

(a) Zeigen Sie, daß für homotope Abbildungen $f, g\colon\ S^1 \to X$ gilt:

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2.$$

(b) Die Narrenkappe ist der topologische Raum, den man aus einem gleichseitigen Dreieck erhält, indem man die drei Seiten wie in Abbildung 1 angegeben identifiziert. Beschreiben Sie die Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einer geeigneten Abbildung $f\colon\ S^1 \to S^1$ und zeigen Sie mit (a), daß die Narrenkappe zusammenziehbar ist.

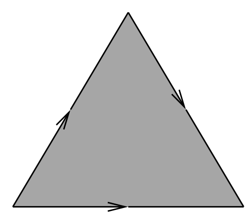

Abbildung 1: Die Narrenkappe.

Knobelaufgabe. Zeigen Sie, daß das Haus mit zwei Zimmern (siehe Abbildung 2) zusammenziehbar ist. Hinweis: Überlegen Sie sich, daß man durch Verdicken der Wände einen Raum erhält, der homöomorph zum 3-Ball ist.

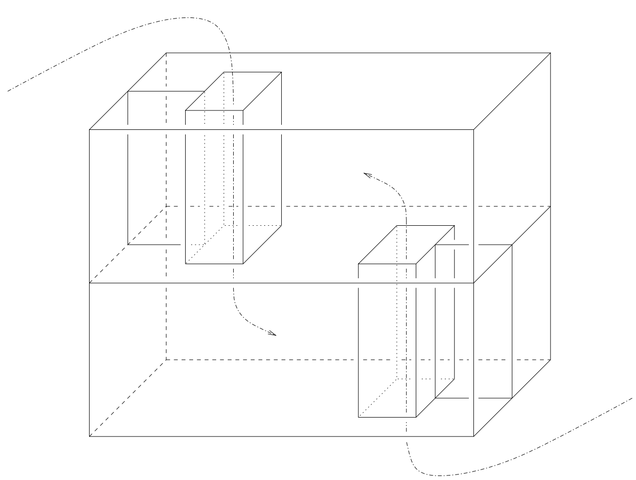

Abbildung 2: Das Haus mit zwei Zimmern.

Abgabe: Montag 27.05.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik