SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß es für $g, h \geq 2$ eine (unverzweigte) Überlagerung $\Sigma_g \to \Sigma_h$ genau dann gibt, wenn $h-1$ ein Teiler von $g-1$ ist. Was kann man für g oder h in $\{0,1\}$ sagen?

Aufgabe 2. Finden Sie die orientierbare geschlossene Fläche, die die verbundene Summe von n Kopien von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ doppelt und unverzweigt überlagert.

Aufgabe 3. Beschreiben Sie eine effektive Operation der zyklischen Gruppe C_k (von beliebiger Ordnung $k \in \mathbb{N}$) auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und auf der Kleinschen Flasche.

Aufgabe 4. Beschreiben Sie explizit, d.h. als stetige Funktion $\mathbf{X}\colon F \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{X}(p) \in T_pF$, Vektorfelder mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Ein Vektorfeld auf S^2 mit genau zwei Nullstellen.

(ii) Ein Vektorfeld auf S^2 mit genau einer Nullstelle.

(iii) Ein Vektorfeld auf T^2 ohne Nullstellen. (Verwenden Sie dazu die Realisierung von T^2 als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 7.)

Bonusaufgabe. Beschreiben Sie explizit ein Vektorfeld auf T^2 mit einer ‘Quelle’, einer ‘Senke’ und zwei ‘hyperbolischen’ Nullstellen (vom Index -1). Dazu ist es opportun, T^2 als $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ zu realisieren und das Vektorfeld $\mathbf{X}$ mittels $\mathbb{Z}^2$-invarianter Komponentenfunktionen auf $\mathbb{R}^2$ zu beschreiben.

b.w.

Bonusaufgabe. (a) Geben Sie eine topologische Beschreibung für eine dreifache verzweigte Überlagerung

$$\text{Kreisring} \to D^2$$

mit drei Verzweigungspunkten unten und sechs Verzweigungspunkten oben. (Dabei sollen die Verzweigungspunkte innere Punkte sein; die Definition einer verzweigten Überlagerung ist dann vollkommen analog zum Fall von Flächen ohne Rand.)

Hinweis: Beschreiben Sie D^2 durch Verkleben von drei Paaren benachbarter Seiten eines Neuneckes, den Kreisring durch geeignetes Verkleben dreier Kopien dieses Neuneckes.

(b) Verifizieren Sie die Riemann-Hurwitz-Formel für dieses Beispiel.

(c) Konstruieren Sie mittels dieser verzweigten Überlagerung eine dreifache verzweigte Überlagerung $S^2 \to S^2$ mit vier Verzweigungspunkten unten, die jeweils zwei Urbilder haben.

Bemerkung: Konstruktionen wie im Beispiel aus (a) spielen eine fundamentale Rolle bei der Konstruktion einer dreifachen verzweigten Überlagerung jeder gegebenen geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit über der 3-Sphäre.

Abgabe: Montag 24.06.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik