SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß zwei geodätische Dreiecke in der hyperbolischen Ebene, die paarweise die gleichen Innenwinkel haben, bereits kongruent sind, d.h. durch eine Isometrie aufeinander abgebildet werden können.

Aufgabe 2. Gegeben seien zwei verschiedene Punkte $z_0, z_1 \in B$ im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene. Die hyperbolische Gerade durch diese beiden Punkte schneide den idealen Rand ∂B (d.h. den Einheitskreis) in den Punkten $z_{\pm\infty}$. Dabei seien die Bezeichnungen so gewählt, daß man beim Durchlaufen der hyperbolischen Gerade in der Richtung von $z_{-\infty}$ nach z_∞ erst z_0 und dann z_1 passiert. Setze

$$\delta(z_0, z_1) := \frac{(z_0 - z_\infty) \cdot (z_1 - z_{-\infty})}{(z_0 - z_{-\infty}) \cdot (z_1 - z_\infty)}.$$

Zeigen Sie, daß $\delta(z_0, z_1)$ invariant ist unter hyperbolischen Isometrien, d.h. für T eine Isometrie wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 12 (wobei man das dortige z_0 zunächst durch ein allgemeines $b \in B$ ersetzen sollte) gilt $\delta(T(z_0), T(z_1)) = \delta(z_0, z_1)$. Beachten Sie, daß mit z_0 und z_1 auch $z_{\pm\infty}$ nach $T(z_{\pm\infty})$ transformiert werden.

(Man kann die Aussage dieser Aufgabe allgemeiner als eine Invarianz des sogenannten Doppelverhältnisses von vier Punkten in $\widehat{\mathbb{C}}$ unter Möbiustransformationen formulieren.)

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Punkt $z \in B \cap \mathbb{R}$ zwischen 0 und 1. Zeigen Sie, daß der hyperbolische Abstand zwischen $0 \in B$ und z gegeben ist durch

$$\log \frac{1+z}{1-z}.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß der hyperbolische Abstand zwischen zwei Punkten $z_0, z_1 \in B$ in der Notation von Aufgabe 2 gegeben ist durch $\log \delta(z_0, z_1)$.

Bonusaufgabe. Beschreiben Sie die drei Typen hyperbolischer Isometrien im Poincaré-Modell.

Bonusaufgabe. Diskutieren Sie die Konstruktion einer hyperbolischen Struktur auf den nicht-orientierbaren Flächen $\#_h \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $h \geq 2$.

Abgabe: Montag 15.07.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik