SS 2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei M eine geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Fixpunkt $x \in M$ von f heißt **Lefschetz-Fixpunkt**, wenn der Graph von f die Diagonale $\Delta \subset M \times M$ transversal in $(x, f(x))$ schneidet. Ist $x \in M$ ein Lefschetz-Fixpunkt, definiert man $L_x(f) := \pm 1$, je nachdem, ob der Graph von f die Diagonale Δ in $(x, f(x))$ positiv oder negativ schneidet. $L_x(f)$ heißt **lokale Lefschetz-Zahl**.

(a) Sei $f\colon M \to M$ eine Abbildung, deren Graph die Diagonale Δ transversal schneidet. Zeigen Sie, daß dann
$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$$
gilt.

(b) Zeigen Sie, daß die lokale Lefschetz-Zahl $L_x(f)$ positiv ist, wenn $I - T_x f$ orientierungserhaltend auf $T_x M$ ist, und daß sie im orientierungsumkehrenden Fall negativ ist.

(c) Diskutieren Sie die möglichen Lefschetz-Fixpunkte in Dimension 2.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten M und N die Identität
$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N)$$
gilt.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, einen orientierungsumkehrenden Selbstdiffeomorphismus besitzt.

(b) Sei M eine $(2n+1)$-dimensionale orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß der Diffeomorphietyp von $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1} \# M$ nicht von der Wahl der Orientierungen auf M und $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ abhängt.

Aufgabe 4. (a) Finden Sie eine Einbettung von $\mathbb{R}^n \# \dots \# \mathbb{R}^n$ (k Summanden) in den $\mathbb{R}^q$ mit q möglichst klein.

(b) Es bezeichne M_0 das Möbiusband. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \cong D^2 \cup_{S^1} \mathrm{M}_0$.

(ii) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \cong \mathrm{M}_0 \cup_{S^1} \mathrm{M}_0$.

(c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ diffeomorph ist zu $(S^2 \times \mathbb{R})/\sim$, wobei unter den Abbildungen

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha_+ : & S^2 & \times & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^2 & \times & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z) & , & t) & \longmapsto & ((-x,-y,-z) & , & 2-t) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccccccc} \alpha_- : & S^2 & \times & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^2 & \times & \mathbb{R} \\ & ((x,y,z) & , & t) & \longmapsto & ((-x,-y,-z) & , & -2-t) \end{array}$$

identifiziert wird.

Abgabe: Mittwoch 21.05.14 in der Vorlesung.