SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $\Delta\colon C^2(\mathbb{R}^2) \to C^0(\mathbb{R}^2)$ der Laplace-Operator auf dem $\mathbb{R}^2$ (vergl. Übungsblatt 4), d.h. für eine zweifach stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ ist Δf die stetige Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Ist $\phi\colon U \to V$ ein C^2-Diffeomorphismus von offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$, so kann man einen neuen Differentialoperator $\widetilde{\Delta}$ auf U definieren durch die Gleichung

$$(\Delta f) \circ \phi = \widetilde{\Delta}(f \circ \phi).$$

Dies entspricht dem folgenden kommutativen Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
C^2(V) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f \mapsto f\circ\phi"'] & C^0(V) \arrow[d, "g \mapsto g\circ\phi"] \\
C^2(U) \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] & C^0(U)
\end{tikzcd}$$

Interpretiert man ϕ als einen Koordinatenwechsel, so ist $\widetilde{\Delta}$ nichts anderes als der Laplace-Operator bezüglich der neuen Koordinaten.

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Laplace-Operator in Polarkoordinaten zu beschreiben. Sei dazu ϕ der Koordinatenwechsel von Polarkoordinaten (r, φ) zu kartesischen Koordinaten (x, y), d.h.

$$\phi(r, \varphi) = (x, y) \quad \text{mit} \quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

mit $U = \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi)$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\colon\ x \leq 0,\ y = 0\}$.

(a) Berechnen Sie mittels der Kettenregel die Ableitungen $(f \circ \phi)_r$ und $(f \circ \phi)_\varphi$, und zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
f_x \circ \phi &= (f\circ\phi)_r \cdot \cos\varphi - (f\circ\phi)_\varphi \cdot \frac{1}{r}\sin\varphi, \\
f_y \circ \phi &= (f\circ\phi)_r \cdot \sin\varphi + (f\circ\phi)_\varphi \cdot \frac{1}{r}\cos\varphi.
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, daß der Laplace-Operator in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 2. Die Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei homogen vom Grad 2, d.h. es gelte $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f eine quadratische Form ist, d.h. es existiert eine reelle $(n \times n)$-Matrix A, so daß $f(x) = x^{\mathrm{t}} A x$. Bestimmen Sie die Matrix A.

b.w.

Aufgabe 3. Wir betrachten ein Dreieck ΔABC im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken

$$A = (1, 0), \quad B = (\cos x, \sin x), \quad C = (\cos y, \sin y),$$

wobei $(x, y) \in Q := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ gewählt werden soll. Die drei Ecken liegen also alle auf dem Einheitskreis.

(a) Zeigen Sie, daß der orientierte Flächeninhalt $F(x, y)$ von ΔABC gegeben ist durch

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(\cos x \sin y - \sin x \cos y + \sin x - \sin y).$$

Hierbei soll der Flächeninhalt positiv sein, wenn die Ecken ABC im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden; negativ, wenn die Ecken im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Wenn zwei der Ecken zusammenfallen, ist der Flächeninhalt gleich Null.

(b) Bestimmem Sie die kritischen Punkte von F im halboffenen Quadrat Q, d.h. die Punkte, wo der Gradient von F der Nullvektor ist.

(c) Bestimmen Sie die Hessesche Matrix von F in diesen kritischen Punkten. Klären Sie, ob die jeweilige Matrix positiv/negativ definit oder indefinit ist, ob also ein Minimum/Maximum vorliegt. Falls an einem der kritischen Punkte keiner dieser drei Fälle eintritt, entscheiden Sie durch eine Betrachtung des Werteverhaltens von F in einer Umgebung dieses kritischen Punktes, ob ein Extremum vorliegt oder nicht.

(d) Auf den Randpunkten des halboffenen Quadrates Q läßt sich der Satz aus der Vorlesung über ein hinreichendes Kriterium für Extrema nicht direkt anwenden. Warum ist das im gegebenen Fall kein Problem?

(e) Interpretieren Sie die obigen Ergebnisse geometrisch.

Aufgabe 4. (a) Im $\mathbb{R}^n$ seien k (nicht notwendig verschiedene) Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Summe der Abstandsquadrate

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} |x - a_j|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

genau ein lokales Minimum hat, und zwar im Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j$ des Punktesystems. Begründen Sie, warum dort tatsächlich das globale Minimum der Funktion f angenommen wird, d.h. $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

(b) Im $\mathbb{R}^2$ seien drei (nicht notwendig verschiedene) Punkte a, b, c gegeben. Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei

$$g(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$$

die Summe der Abstände zu diesen drei Punkten. Beachten Sie, daß die Funktion g nur auf der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$ stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie, daß die Funktion g ein eindeutiges globales Minimum hat, und zwar — je nach Lage der drei Punkte — in einem der Punkte a, b, c oder in einem Punkt x_0 mit der Eigenschaft, daß die Geradensegmente von x_0 nach a, b bzw. c in x_0 paarweise einen Winkel von 120 Grad einschließen. Unter welcher Bedingung an a, b, c tritt der eine oder der andere Fall ein? Skizzieren Sie dazu das Gradientenfeld ∇g z.B. in der Nähe des Punktes a, in Abhängigkeit von dem Winkel, den die Vektoren $b - a$ und $c - a$ bilden.

Abgabe: Mittwoch, 10.06.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).