

# Topologie

## Übungsblatt 1

Zur Erinnerung: Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , genannt **offene Mengen**, mit den Eigenschaften:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ ,
- (ii) der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen,
- (iii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Das System  $\mathcal{O}$  heißt **Topologie** auf  $X$ .

Eine Abbildung  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, falls  $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$  für alle  $V \in \mathcal{O}_Y$ .

Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt **Umgebung** des Punktes  $x \in X$ , falls es eine offene Menge  $V$  gibt mit  $x \in V \subset U$ .

Ein topologischer Raum heißt **Hausdorffraum** (oder die Topologie **Hausdorffsch**), falls je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.

Sei  $A \subset X$  eine beliebige Teilmenge des topologischen Raumes  $(X, \mathcal{O})$ . Die **Relativtopologie** oder **induzierte Topologie**  $\mathcal{O}_A$  von  $A$  ist dadurch definiert, daß für eine Teilmenge  $V \subset A$  genau dann  $V \in \mathcal{O}_A$  gilt, wenn es ein  $U \in \mathcal{O}$  gibt mit  $V = A \cap U$ . Mit anderen Worten, die offenen Mengen in  $A$  sind genau die Durchschnitte offener Mengen in  $X$  mit  $A$ .

**Aufgabe 1.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subset M$  heiße offen, falls es zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß der offene  $\varepsilon$ -Ball um  $x$ ,

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\},$$

noch ganz in  $U$  liegt. Zeigen Sie:

- (a) Dies definiert eine Topologie auf  $M$  (die sogenannte **metrische Topologie**).
- (b) Diese Topologie ist Hausdorffsch.

**Aufgabe 2.** (a) Zeigen Sie, daß die Relativtopologie  $\mathcal{O}_A$  einer Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{O})$  in der Tat eine Topologie auf  $A$  ist.

(b) Sei  $\mathcal{O}$  die gewöhnliche Topologie auf dem  $\mathbb{R}^2$ , d. h. die durch die euklidische Metrik definierte metrische Topologie. Zeigen Sie, daß dann auch die auf  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  induzierte Topologie die gewöhnliche Topologie auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen über einen topologischen Raum  $X$  äquivalent sind:

- (i)  $X$  ist zusammenhängend.
- (ii) Die einzigen Teilmengen von  $X$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind  $\emptyset$  und  $X$ .
- (iii) Falls  $X = A \cup B$ , mit  $A, B \neq \emptyset$  Teilmengen von  $X$ , so gilt  $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$  oder  $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ . Hier bezeichnet  $\overline{A}$  die abgeschlossene Hülle von  $A$ .

**Aufgabe 4.** Ein topologischer Raum (oder dessen Topologie) heißt **diskret**, falls jede Teilmenge offen ist, oder äquivalent: falls alle einpunktigen Teilmengen offen sind. Dies ist die ‘feinstmögliche’ Topologie, d. h. diejenige mit den meisten offenen Mengen. Man stellt sich die Punkte eines solchen Raumes als diskret liegend vor, im Gegensatz zu kontinuierlich verteilten Punkten.

Ein Raum heißt **total unzusammenhängend**, falls jede Zusammenhangskomponente aus nur einem Punkt besteht. Zeigen Sie:

- (a) Jeder diskrete Raum ist total unzusammenhängend.
- (b) Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen, mit der von den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  induzierten Topologie, ist total unzusammenhängend, aber nicht diskret.

**Aufgabe 5.** Es seien  $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  der abgeschlossene Einheitsball im  $\mathbb{R}^n$  und  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  die Einheitssphäre.

- (a) Geben Sie einen Homöomorphismus (d. h. eine bijektive und in beide Richtungen stetige Abbildung) von  $\mathbb{R}^n$  auf  $D^n \setminus S^{n-1}$  an.
- (b) Die Gerade durch den ‘Nordpol’  $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und einen weiteren Punkt  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$  schneidet die Äquatorebene  $\{x_{n+1} = 0\}$  in genau einem Punkt. Dies definiert eine Abbildung  $S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die sogenannte **stereographische Projektion**. Geben Sie eine explizite Formel für diese Abbildung an und zeigen Sie damit, daß  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zu  $S^n \setminus \{p\}$  ist für jeden beliebigen Punkt  $p$  von  $S^n$ .
- (c) Zeigen Sie, daß der Quotientenraum  $D^n/S^{n-1}$  homöomorph zu  $S^n$  ist. (Mit  $X/A$  ist der Quotientenraum unter der Äquivalenzrelation  $x \sim y \Leftrightarrow (x = y \text{ oder } x, y \in A)$  gemeint.)