SS 2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Topologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Fixpunktmenge einer simplizialen Abbildung $|K| \to |K|$ ein Raum $|L|$ mit L Unterkomplex von K^1 ist, im allgemeinen aber nicht L Unterkomplex von K.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ als $G(K, L)$ wie in Abschnitt 5.2 der Vorlesung, mit der in der Vorlesung beschriebenen Triangulierung $|K| \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und einem geeigneten Unterkomplex L von K.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche mittels der beiden folgenden Methoden, und vergleichen Sie die Ergebnisse.

(a) Beschreiben Sie die Wirkung einer geeigneten Gruppe G (mit zwei Erzeugern) auf der Ebene $\mathbb{R}^2$, so daß der Orbitraum $\mathbb{R}^2/G$ homöomorph zur Kleinschen Flasche ist.

(b) Wählen Sie eine Triangulierung der Kleinschen Flasche analog zur Triangulierung von T^2 aus der Vorlesung und berechnen Sie die Fundamentalgruppe als $G(K, L)$ (vergl. Aufgabe 2).

Trägt die Kleinsche Flasche die Struktur einer topologischen Gruppe?

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche F mittels der Beschreibung von F als verbundene Summe $F = \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und des Satzes von Seifert und van Kampen. Vergleichen Sie die so gefundene Präsentation von $\pi_1(F)$ mit den Ergebnissen der vorstehenden Aufgabe.

(b) Berechnen Sie analog die Fundamentalgruppen von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# T^2$ und $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, und zeigen Sie, daß diese Gruppen isomorph sind. (Wir werden in der Vorlesung zeigen, daß diese Flächen tatsächlich homöomorph sind.)

Bonusaufgabe. Zeigen Sie mittels des Satzes von Seifert und van Kampen, daß die Narrenkappe (Übungsblatt 4, Aufgabe 2) einfach zusammenhängend ist.

Bonusaufgabe. Sei G eine endlich präsentierte Gruppe. Konstruieren Sie einen Simplizialkomplex K mit $|K|$ wegzusammenhängend und $\pi_1(|K|) \cong G$.

Bonusaufgabe. (a) Zeigen Sie, daß sich jeder Isomorphismus $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, anders gesagt: jedes Element der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ der Gruppe der über $\mathbb{Z}$ invertierbaren (2×2)-Matrizen A mit ganzzahligen Einträgen (d.h. $\det A = \pm 1$), in der Form $f_*\colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$ mit einem Homöomorphismus f des 2-Torus T^2 realisieren läßt.

(b) Ein **Linsenraum** ist ein topologischer Raum (sogar eine 3-Mannigfaltigkeit), den man aus zwei Kopien des Volltorus $S^1 \times D^2$ durch Verkleben entlang des Randes $\partial(S^1 \times D^2) = S^1 \times S^1 = T^2$ mittels eines Homöomorphismus f von T^2 erhält. Was können Sie über die Fundamentalgruppe eines Linsenraumes aussagen?

Abgabe: Mittwoch 14.6.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)