Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Topologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Homologiegruppen der folgenden Simplizialkomplexe:

(a) Drei Kopien des Randes eines 2-Simplex, verklebt entlang einer Ecke.

(b) Zwei hohle Tetraeder, verklebt entlang einer Kante.

Aufgabe 2. (a) Wählen Sie eine Triangulierung des Möbiusbandes mit möglichst wenigen Dreiecken, und berechnen Sie die Homologiegruppen des entsprechenden Simplizialkomplexes.

(b) Wählen Sie eine Triangulierung des Möbiusbandes, bei der der zentrale Kreis ein Unterkomplex ist. Sei z_0 der durch diesen Unterkomplex definierte 1-Zykel. Weiter sei z der 1-Zykel, der durch die Kanten im Rand des Möbiusbandes definiert ist. Zeigen Sie, daß $[z] = \pm 2[z_0]$ in der ersten Homologiegruppe.

Aufgabe 3. Kann es in einer Triangulierung der Narrenkappe 2-Zykel geben? Überlegen Sie sich dies zunächst anhand einer konkret gewählten Triangulierung.

Aufgabe 4. Wählen Sie eine Triangulierung von S^n mit der Eigenschaft, daß die Antipodenabbildung $x \mapsto -x$ simplizial ist und eine Triangulierung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ induziert. Identifizieren Sie einen n-Zykel in dieser Triangulierung von S^n und, für ungerades n, in der entsprechenden Triangulierung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Was passiert für gerades n?

Bonusaufgabe. Sei $|K|$ ein triangulierter Raum homöomorph zu einem Torus mit dem Inneren von drei disjunkten Scheiben entfernt. Orientiere die Randkurven von $|K|$ und bezeichne die resultierenden elementaren 1-Zykel mit z_1, z_2, z_3. Zeigen Sie, daß $[z_3] = \lambda[z_1] + \mu[z_2]$ in $H_1(K)$, mit $\lambda, \mu \in \{1, -1\}$. Was läßt sich sagen, wenn man den Torus durch die Kleinsche Flasche ersetzt?

Bonusaufgabe. (a) Verifizieren Sie explizit, daß $\partial\sigma$ (für ein orientiertes q-Simplex σ) wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Reihenfolge der Ecken innerhalb der gegebenen Orientierungsklasse. Überprüfen Sie weiter, daß $\partial(-\sigma) = -\partial\sigma$.

(b) Eine einfach geschlossene, orientierte polygonale Kurve in einem Simplizialkomplex K definiert einen 1-Zykel, wenn man sich die Kurve denkt als formale Summe der Kanten, die diese Kurve ausmachen. Zeigen Sie, daß $Z_1(K)$ von solchen 'elementaren' Zykeln erzeugt wird.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, besteht in den folgenden Schritten.

(o) Es genügt, die Aussage für Simplizialkomplexe K mit $\dim K = 1$ und $|K|$ zusammenhängend zu beweisen.

(i) Betrachte den **Augmentationshomomorphismus** $\varepsilon\colon C_0(K) \to \mathbb{Z}$, definiert durch

$$\varepsilon\Big(\sum \lambda_i x_i\Big) = \sum \lambda_i,$$

wo die x_i die Ecken von K sind und $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$.

(ii) Sei z ein 1-Zykel. Wir können die 1-Simplexe von K so orientieren, daß alle Koeffizienten in z nicht-negativ sind. Sei (x, y) eine Kante von K, die in z mit einer Vielfachheit $\lambda > 0$ auftritt. Sei K' der Komplex, der aus K durch Entfernen der Kante (x, y) (aber nicht der Ecken x, y) entsteht. Dann ist $|K'|$ noch stets zusammenhängend, denn andernfalls würde $z - \lambda(x, y)$ in K' in zwei 1-Ketten c_1, c_2 zerfallen mit $\varepsilon \circ \partial_1(c_i) \neq 0$.

(iii) Es gibt also einen Kantenweg in K' von y nach x. Dieser kann so gewählt werden, daß er zusammen mit (x, y) einen elementaren Zykel z_1 in K definiert. Dann ist $z - \lambda z_1$ ein Zykel in K'. Iteriere dieses Argument, um z als Summe von elementaren Zykeln zu schreiben.

Bonusaufgabe. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.2 aus der Vorlesung wie folgt. Sei $\sum_i \lambda_i v_i$ ein 0-Zykel im Komplex K, wobei die v_i Ecken von K sind und $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Überlegen Sie sich folgendes.

(i) Wähle in jeder Zusammenhangskomponente von $|K|$ genau eine Ecke w_j. Der Zykel $\sum_i \lambda_i v_i$ ist homolog zu einem Zykel $\sum_j \mu_j w_j$, d.h. $[\sum_i \lambda_i v_i] = [\sum_j \mu_j w_j]$ in $H_0(K)$.

(ii) Falls $\sum_j \mu_j w_j$ ein Rand ist, so müssen alle μ_j verschwinden. Verwenden Sie dazu den Augmentationshomomorphismus.

Abgabe: Mittwoch 28.6.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)