

Analysis II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Bestimmen Sie jeweils explizit eine Lösung α mit vorgegebenem Startwert $\alpha(0) = x_0$ im angegebenen Intervall, und geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

(i) $\dot{x} = x^3/2, \quad x_0 \in \mathbb{R}^+;$

(ii) $\dot{x} = e^x \cos t, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

(iii) $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}/x, \quad 0 < x_0 < 1.$

Aufgabe 2. Es seien G eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 und $v: G \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto v(t, x)$ eine reellwertige Funktion auf G . Wir betrachten eine Lösung α der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(t, x).$$

Zeigen Sie, daß man die Kurve $t \mapsto (t, \alpha(t))$ als Integralkurve des Vektorfeldes

$$(t, x) \mapsto V(t, x) := (1, v(t, x))$$

auf G interpretieren kann.

Skizzieren Sie das Vektorfeld V für die folgenden Differentialgleichungen, und bestimmen Sie die Integralkurven von V .

(i) $\dot{x} = x/t$ auf $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};$

(ii) $\dot{x} = -t/x$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+;$

(iii) $\dot{x} = t/x$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. (a) Sei $h: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ($b = \infty$ ist zugelassen) mit divergierendem uneigentlichem Integral

$$\int_a^b \frac{1}{h(x)} dx,$$

das heißt

$$\int_a^s \frac{1}{h(x)} dx \longrightarrow \infty \text{ für } s \longrightarrow b, s < b.$$

Zeigen Sie, daß es für jedes $x_0 \in [a, b)$ eine streng monoton wachsende Lösung $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\dot{x} = h(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$ gibt, und daß $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = b$ gilt.

(b) Die Differentialgleichung $\ddot{x} = g - \rho \dot{x}^\beta$ ($g =$ Erdbeschleunigung, β, ρ positive Konstanten) beschreibt einen durch Reibung gebremsten Fall eines Körpers im Schwerfeld der Erde.

Zeigen Sie: Es gibt auf \mathbb{R}_0^+ eine Lösung α mit $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ und $\ddot{\alpha} \geq 0$. Diese hat die "Endgeschwindigkeit" $v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\alpha}(t) = (g/\rho)^{1/\beta}$. Berechnen Sie die Lösung explizit für $\beta = 1$ und $\beta = 2$.