SS 2020

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.

(a) Für welche reellen Zahlen a, b, c ist $ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion in $z = x + \mathrm{i}y$? Bestimme Sie diese holomorphe Funktion. Ist sie eindeutig festgelegt?

(b) Wo ist die Funktion $f(z) = |z|^2 + \frac{1}{2}\overline{z}^2$ komplex differenzierbar? Ist f irgendwo holomorph?

Aufgabe 2. Auf $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}\colon\ z \neq 0\}$ betrachte die Funktion $f(z) = z^2$. Bestimmen Sie Gleichungen für die Bildkurven der Geraden $x = a$ und $y = b$ unter f für reelle $a, b \neq 0$ und $z = x + \mathrm{i}y$. Skizzieren Sie einige dieser Kurven. Zeigen Sie, daß diese Bildkurven jeweils senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g\colon\ U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\gamma\colon\ [a, b] \to U,\ t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ eine C^1-Kurve. In der reellen Analysis definiert man das Kurvenintegral durch

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy := \int_a^b \big(f(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + g(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\big)\,dt.$$

Sei nun γ eine geschlossene Kurve, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Wir definieren den von γ umlaufenen Flächeninhalt als

$$F(\gamma) := \int_\gamma x\,dy.$$

(Falls Sie die Analysis III gehört haben, werden Sie den Sinn dieser Definition direkt erkennen.)

(a) Zeigen Sie (möglichst ohne Methoden der Analysis III), daß auch gilt:

$$F(\gamma) = -\int_\gamma y\,dx.$$

(b) Welche Bedeutung hat das komplexe Kurvenintegral

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz$$

für eine geschlossene Kurve γ?

Abgabe: Dienstag 21.04.20
Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den
Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail
“Blatt 2, [Name], [Matrikelnr.]” angeben.