SS 2020

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Für ganze Zahlen n, k und $r \in (0,1) \cup (1,\infty)$ sei folgende Kurve gegeben:

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{int} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Umlaufzahl von γ um 0.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, erzeugt durch die Homotopieklasse rel $\{0,1\}$ der Schleife γ, wobei

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \;\; t \in [0,1].$$

(Hier steht $\mathbb{C}^*$ wie üblich für $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.) Konkreter, überlegen Sie sich, daß der Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \to \mathbb{Z}$ gegeben ist durch $[\alpha] \mapsto n(\alpha, 0)$, d.h. durch die Umlaufzahl.

Hinweis: Für eine Schleife α in $\mathbb{C}^*$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$, setze

$$\alpha_t = \alpha|_{[0,t]}$$

und

$$\tilde{\alpha}(t) = \int_{\alpha_t} \frac{dz}{z}, \;\; t \in [0,1].$$

Zeigen Sie, daß dies einen Weg in $\mathbb{C}$ definiert mit $\exp(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$. Überlegen Sie sich, daß $\tilde{\alpha}$ in $\mathbb{C}$ homotop rel $\{0,1\}$ zur Strecke von 0 nach $2\pi\mathrm{i}k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$ ist. Alternativ, schreiben Sie $\alpha(t) = r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ und argumentieren Sie direkter mit der Definition der Umlaufzahl. Denken Sie daran, nicht nur die Bijektivität der Abbildung $[\alpha] \mapsto n(\alpha, 0)$ zu zeigen, sondern auch die Homomorphismuseigenschaft (und die Wohldefiniertheit).

Aufgabe 3. (a) Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus definiert ist. Zeigen Sie, daß man dann für jede natürlich Zahl k auf G eine **holomorphe Wurzelfunktion** $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ definieren kann, d.h. eine holomorphe Umkehrfunktion von $z \mapsto z^k$,

(b) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}^*$ eine stetige, geschlossene Kurve, mit $\gamma(a)$ auf der positiven reellen Achse. Für alle $t \in [a,b]$ sei $\sqrt[k]{\gamma(t)}$ durch die Bedingung $\sqrt[k]{\gamma(a)} \in \mathbb{R}$ und die Forderung, daß die Abbildung $t \mapsto \sqrt[k]{\gamma(t)}$ stetig sei, definiert. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \sqrt[k]{z}\, dz$ für gegebene k, $\gamma(a)$ und $n(\gamma, 0)$.

Aufgabe 4.* Gibt es eine stetige geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ z & \longmapsto & n(\gamma, z) \end{array}$$

unendlich viele Werte annimmt?

* Die gesternten Aufgaben werden nicht korrigiert oder bepunktet. In der Folgewoche erhalten Sie aber dennoch eine Lösungsskizze, so daß diese Aufgaben der Selbstkontrolle (oder dem reinen mathematischen Vergnügen) dienen.

Abgabe: Dienstag 9.06.20
Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den
Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail
"Blatt 8, [Name], [Matrikelnr.]" angeben.