

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in all ihren Singularitäten:

$$(a) \frac{1}{(z^3 - 1)^2} \quad (b) \frac{1}{\sin \pi z} \quad (c) \frac{1}{e^z + 1}$$

Hinweis zu (a): Damit die Rechnung nicht zu sehr ausufert, bietet es sich an, das Polynom $z^3 - 1$ zunächst in der Form $(z - a)(z - b)(z - c)$ zu schreiben. Die Nullstellen a, b, c können Sie natürlich explizit angeben. Durch Koeffizientenvergleich von $z^3 - 1$ mit dem ausmultiplizierten Polynom $(z - a)(z - b)(z - c)$ finden Sie nützliche Identitäten für a, b, c . (Was weiß man z.B. über $a + b + c$?) Berechnen Sie die Residuen dann zunächst (mittels eines in der Vorlesung beschriebenen Verfahrens für Residuen in Polstellen) als Ausdruck in a, b, c . Mittels der genannten Identitäten für a, b, c lassen sich diese Ausdrücke dann sehr vereinfachen.

Aufgabe 2. Welche Werte kann das Integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^2}$ für geschlossene Kurven γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ annehmen?

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3} dx$$

Aufgabe 4.* Die Funktion f habe einen Pol zweiter Ordnung in $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $\sum_{k=-2}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ die Laurent-Reihe von f um z_0 . Wie berechnet man das Residuum $\text{Res}_{z_0} f^2$ aus den Laurent-Koeffizienten a_k von f ?

Versuchen Sie zunächst, die Formel durch eine heuristische Überlegung zu finden, indem Sie den relevanten Term der Laurent-Reihe von f^2 aus der Laurent-Reihe von f durch Ausmultiplizieren bestimmen. Bestätigen Sie dann Ihre Überlegung mit einem formalen Argument.

* Die gesternteten Aufgaben werden nicht korrigiert oder bepunktet. In der Folgewoche erhalten Sie aber dennoch eine Lösungsskizze, so daß diese Aufgaben der Selbstkontrolle (oder dem reinen mathematischen Vergnügen) dienen.

Abgabe: Dienstag 16.06.20

Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den

Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail

“Blatt 9, [Name], [Matrikelnr.]” angeben.