

Funktionentheorie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{(a + \cos x)(a - \sin x)} dx, \quad a \in (1, \infty).$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

$$(a) \quad 2z^8 - 7z^5 + 3iz^2 - \sqrt{2} \quad \text{in } |z| > 1, \quad (b) \quad \frac{1}{2}z^7 + 2z^6 + z^3 - 9z^2 + 5i \quad \text{in } 1 < |z| < 2.$$

Aufgabe 3. Es sei λ eine reelle Zahl größer als 1. Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ genau eine Lösung hat, die überdies reell ist.

Aufgabe 4. * Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{O}(G)$, die in G lokal gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Es sei $F_n \in \mathcal{O}(G)$ eine Stammfunktion zu f_n , $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G lokal gleichmäßig gegen eine Stammfunktion F von f konvergiert, falls es einen Punkt $a \in G$ gibt, so daß die Folge $(F_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

* Die gesternteten Aufgaben werden nicht korrigiert oder bepunktet. In der Folgewoche erhalten Sie aber dennoch eine Lösungsskizze, so daß diese Aufgaben der Selbstkontrolle (oder dem reinen mathematischen Vergnügen) dienen.

Abgabe: Dienstag 23.06.20

Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den
Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail
"Blatt 10, [Name], [Matrikelnr.]" angeben.