Symplektische Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig bezüglich des Ursprungs ist, d.h. für jeden Punkt $x \in U$ liegt auch tx in U für alle $t \in [0,1]$. Sei $\alpha = \sum_{i=1}^n a_j \,\mathrm{d}x_j$ eine 1-Form auf U mit $\mathrm{d}\alpha = 0$, d.h.

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \quad \text{für alle } i,j = 1,\ldots,n.$$

Rechnen Sie nach, daß die Funktion

$$f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i a_i(tx)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion der 1-Form α ist, d.h. $\mathrm{d}f = \alpha$.

(b) Es sei $\omega = \sum_{i<j} f_{ij}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ eine 2-Form auf U.

(i) Zeigen Sie, daß ω genau dann geschlossen ist, wenn

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} = 0$$

für alle $i < j < k$ gilt.

(ii) Verifizieren Sie, daß in diesem Fall durch

$$\beta := \sum_{i<j} \Big(\int_0^1 t f_{ij}(tx)\,\mathrm{d}t \Big) \cdot (x_i\,\mathrm{d}x_j - x_j\,\mathrm{d}x_i)$$

eine 1-Form auf U definiert ist mit $\mathrm{d}\beta = \omega$, und mit $\beta_0 = 0$, falls $\omega_0 = 0$.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß jede nichtverschwindende 1-Form auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit lokal als $f\,\mathrm{d}g$ geschrieben werden kann mit geeigneten glatten Funktionen f, g.

(b) Verwenden Sie (a), um den Satz von Darboux in Dimension 2 zu beweisen.

Aufgabe 3. (a) Es seien ω_0, ω_1 Flächenformen (d.h. nicht-verschwindende 2-Formen) auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit Σ, die dieselbe Orientierung von Σ induzieren. Zeigen Sie, daß $(1-t)\omega_0 + t\omega_1$ eine symplektische Form ist für alle $t \in [0,1]$.

(b) Finde zwei symplektische Formen ω_0, ω_1 auf dem $\mathbb{R}^4$, die dieselbe Orientierung induzieren, wo aber die konvexe Linearkombination $(1-t)\omega_0 + t\omega_1$ für ein $t \in [0,1]$ degeneriert ist. Gibt es eine Familie $(\omega_t)_{t\in[0,1]}$ von symplektischen Formen, die ω_0 mit ω_1 verbindet?

b.w.

(c) Es sei Σ eine geschlossene Fläche, und ω_0, ω_1 seien symplektische Formen auf Σ mit $[\omega_0] = [\omega_1] \in H^2_{\mathrm{dR}}(\Sigma)$. Zeigen Sie, daß es dann eine Isotopie $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ von Σ gibt, so daß $\phi_t^*\omega_0$ symplektisch ist für alle $t \in [0,1]$, und $\phi_1^*\omega_0 = \omega_1$.

Aufgabe 4. Sei X ein (zeitunabhängiges) Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M, und (α_t) eine glatte Familie von k-Formen. Wir schreiben (ϕ_t) für den Fluß von X. Verifizieren Sie die Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_t^*\alpha_t)|_{t=t_0} = \phi_{t_0}^*\big(\dot{\alpha}_t|_{t=t_0} + L_X\alpha_{t_0}\big)$$

direkt (und ohne Verwendung lokaler Koordinaten) durch Berechnung des Grenzwertes eines geeigneten Differenzenquotienten.

Abgabe: Dienstag 2.5.23 in der Übung.